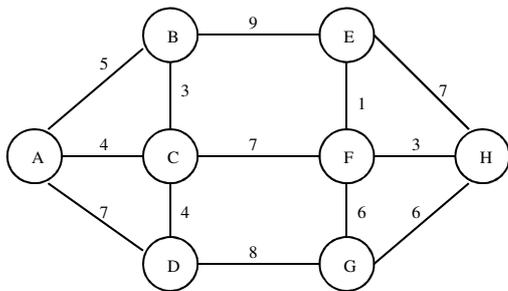


PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA 2013-2014

Optimização em Redes

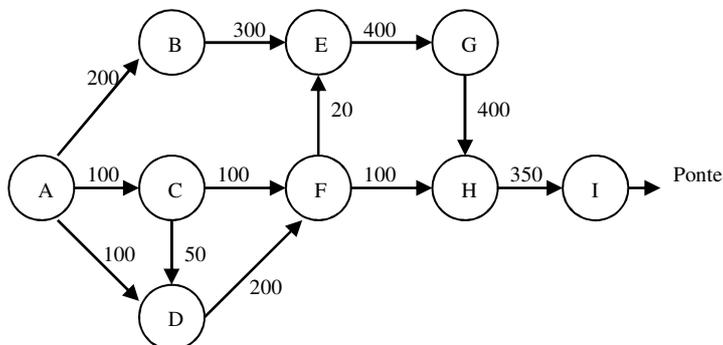
1. Os serviços municipalizados de certa região pretendem levar a energia eléctrica às localidades do concelho representadas na figura seguinte.



Os postes para suporte dos cabos eléctricos devem ser colocados ao longo das estradas à distância de 100 metros entre si. Os valores da figura acima indicam as distâncias (em Km) entre as localidades.

O fornecedor habitual dos postes oferece neste momento condições excepcionais de aquisição. Quantos postes devem ser encomendados? Justifique.

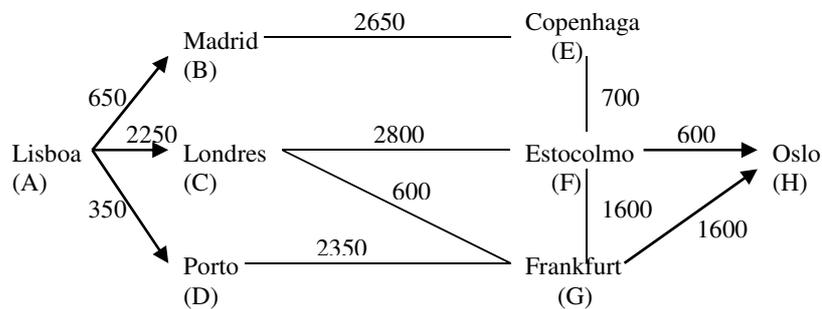
2. Numa pequena cidade situada à beira rio e servida por uma auto-estrada (que não a atravessa), vai construir-se uma ponte, pois quase todos os utilizadores da via rápida desejam atravessar o rio e retomar a auto-estrada, que recomeça do outro lado do curso de água. (Actualmente a travessia é feita de barco, o que tem vários inconvenientes). A rede das vias subsequentes à auto-estrada e que permitirão o acesso à projectada ponte, tem o seguinte aspecto:



O nodo A representa a auto-estrada. As capacidades de circulação/hora estão indicadas na rede.

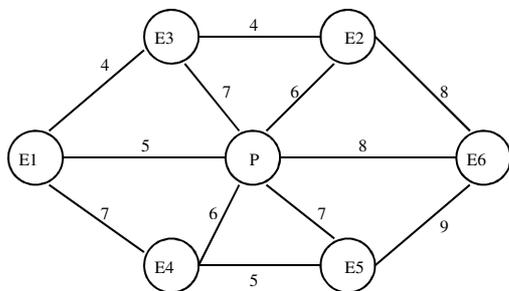
Indique, justificando, qual deverá ser a capacidade mínima de circulação/hora da ponte, de forma que o escoamento de tráfego se faça junto dela sem dificuldade.

3. O gestor de uma empresa necessita de ir de Lisboa a Oslo. Depois de consultadas as agências de viagens, as únicas ligações que interessa considerar para o momento em que terá que ser feita a viagem são as representadas no grafo seguinte, onde os valores sobre os arcos representam as distâncias entre as cidades:



Admitindo que o tempo gasto na viagem pode considerar-se proporcional aos quilómetros percorridos, indique qual o percurso que o gestor deve seguir para minimizar o tempo gasto na viagem.

4. Na construção de uma nova urbanização, com seis edifícios e uma piscina, foram elaborados estudos no sentido de identificar as possíveis localizações para os canos de água. A rede seguinte indica as distâncias entre os diversos pontos:



a) Indique, justificando, as ligações que deverão ser efectuadas de forma a garantir que chegará água a todos os edifícios e à piscina, minimizando a quantidade total de cano gasta.

b) A água da piscina pode ser usada para o combate a incêndios que deflagrem nos edifícios tendo, para esse efeito, sido construídas as ligações:

Arco	(P,E1)	(P,E2)	(P,E3)	(P,E4)	(P,E5)	(P,E6)
Capac. (10^2 m^3)	5	6	7	6	7	8
Arco	(E3,E1)	(E4,E1)	(E2,E3)	(E6,E2)	(E5,E6)	(E5,E4)
Capac. (10^2 m^3)	4	7	4	8	9	5

Suponha que deflagra um incêndio no edifício E1 no momento em que na piscina existem 1500 m^3 de água. Indique, justificando, a quantidade máxima de água que pode ser utilizada no combate a esse incêndio e as canalizações que serão utilizadas.

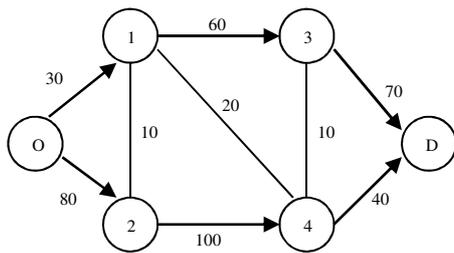
A piscina quando totalmente cheia contém 1800 m^3 de água. Se ela estivesse cheia no momento em que deflagrou o incêndio teria sido possível utilizar toda a água no seu combate? Justifique.

5. Uma agência de viagens vende bilhetes de avião de Lisboa (L) para Tóquio (T). Como não há ligações directas os seus clientes vão a Amesterdão (A), a Roma (R) ou a Frankfurt (F) tomar o avião. A viagem Amesterdão-Tóquio é directa mas a viagem via Roma ou Frankfurt passa em Bangkok. (B). Os lugares disponíveis em cada ligação são os indicados na tabela:

	A	F	R	B	T
L	112	168	230	-	-
A	-	168	-	-	285
F	168	-	180	159	-
R	-	180	-	145	-
B	-	-	-	-	262

Determine quantos bilhetes pode a agência emitir e indique qual o número máximo de passageiros por itinerário.

6. Considere a seguinte rede de estradas:



Os números sobre os arcos representam as capacidades de tráfego. Resolva o problema que consiste em orientar as arestas de modo a maximizar a capacidade de tráfego de O para D.

7. A empresa de mão de obra temporária TEMP LDA tem 276 candidatos a emprego para os meses de verão. A maioria deles, 183, tem apenas a escolaridade básica, 59 têm o 9º ano de escolaridade e os restantes têm o 12º ano. Para esses meses a TEMP LDA recebeu pedidos de cinco empresas (E1,...,E5) que pretendem contratar trabalhadores temporários e cujas necessidades são as seguintes:

	E1	E2	E3	E4	E5
Escola Básica	35	-	-	-	37
9º ano	10	29	-	25	15
12º ano	-	14	18	-	3

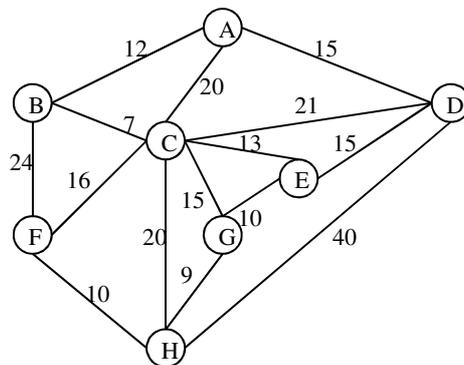
Por cada pessoa colocada numa empresa a TEMP LDA recebe 100 u.m. A TEMP LDA pretende maximizar a receita. Mostre que os técnicos da TEMP LDA podem determinar os contratos que devem ser firmados resolvendo um problema de optimização em redes.

8. Pretende-se construir uma linha de caminho de ferro entre as cidades A e D. Em A apenas se admite uma localização para a estação enquanto que em D há três alternativas para o terminal da referida linha. Os troços possíveis e os respectivos custos (em milhões de u.m.) são dados na tabela:

	A	E1	E2	E3	D1	D2	D3
A	-	6	5	4	-	-	-
E1		-	-	-	2	3	-
E2			-	-	5	6	6
E3				-	-	9	9
D1					-	-	-
D2						-	-
D3							-

Qual o traçado da linha que minimiza os custos? Justifique.

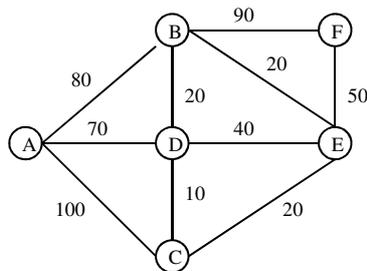
9. Numa cidade vai ser construída uma rede de metropolitano para estabelecer a ligação entre 8 futuras estações. Na rede abaixo estão indicadas as distâncias entre estações (em centenas de metros).



As ligações entre as estações A e F e A e G são consideradas prioritárias, devendo por isso ser o mais curtas possíveis.

- Sabendo que o custo de construção da rede é proporcional ao seu comprimento, determine o traçado da rede de metropolitano que deve ser adoptado justificando as suas opções.
- Avalie o impacte das opções prioritárias na solução.

10. Para impulsionar o desenvolvimento económico num concelho do interior do país, foi aprovada a construção de novos troços de estradas IP que farão a ligação entre duas cidades A e F. Na rede abaixo estão representados os traçados possíveis e as distâncias quilométricas entre as localidades. Os troços entre B e D e entre C e E já são actualmente estradas IP. Os custos dos restantes troços da rede são proporcionais aos respectivos comprimentos.



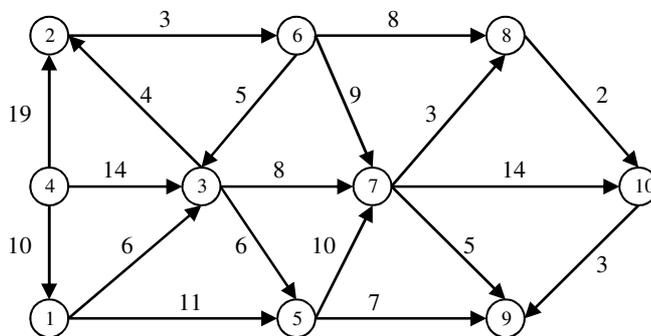
- a) Determine os troços de estradas IP que devem ser construídos. Justifique.
- b) Suponha que, após o estudo de viabilidade e da atribuição do projecto de construção dos novos troços de estradas a uma empresa de obras públicas, a equipa de engenharia responsável pelo projecto constata que, se a ligação entre as cidades A e F passar pela localidade D, terá que ser construído nessa localidade um túnel que custará T unidades monetárias. Explique, cuidadosamente, de que forma este novo dado poderá afectar o projecto inicial e o que deve ser feito para o reavaliar.

11. Uma forte queda de neve, causada por uma súbita vaga de frio que assolou o norte do país, tornou intransitáveis as estradas da região deixando isoladas as cidades C1 e C2 e as aldeias A1 a A6. Para desimpedir as estradas os bombeiros dispõem de um limpa-neves que demora em média duas horas a limpar um quilómetro de estrada. Na tabela abaixo apresentam-se os comprimentos, em quilómetros, das estradas interditadas.

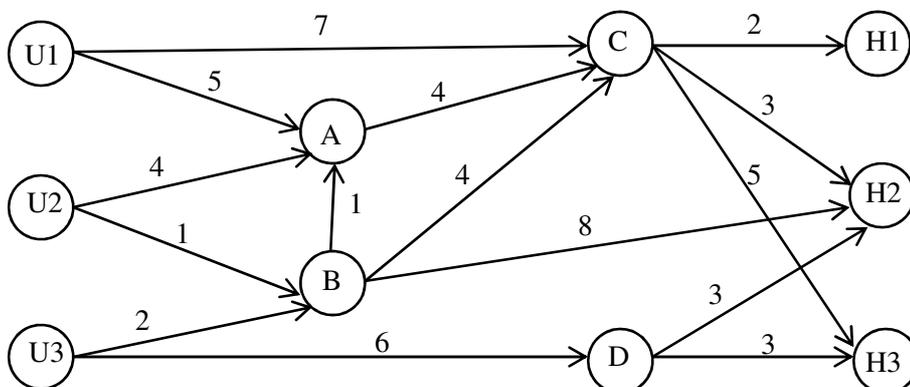
	C1	C2	A1	A2	A3	A4	A5	A6
C1	-	-	8	-	-	-	-	4
C2		-	-	-	3	9	-	-
A1			-	2	-	4	-	-
A2				-	4	3	6	7
A3					-	5	-	2
A4						-	8	-
A5							-	5

Como devem os bombeiros proceder para restabelecer no mais curto espaço de tempo as ligações entre todas as localidades? Quanto tempo irão demorar os bombeiros a resolver o problema? Justifique.

12. Na rede abaixo o nodo 4 representa o local onde irão ser descarregadas ramas de petróleo para posteriormente refinar. As localizações potenciais para a refinaria são representadas pelos nodos 8, 9 e 10. Admitindo que os arcos orientados da rede representam as direcções possíveis de circulação no transporte rodoviário das ramas e que os valores junto a cada arco (i,j) representam o custo de transporte das ramas de i para j , determine a localização óptima da refinaria. Justifique.

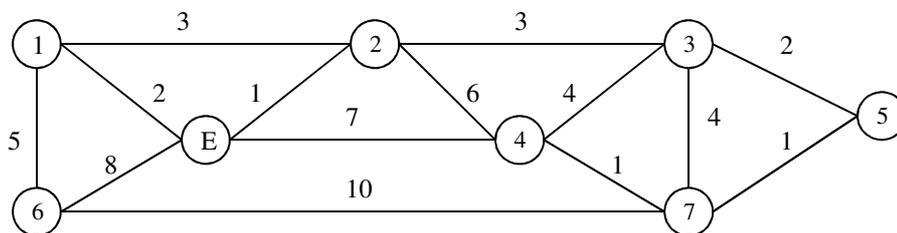


13. Devido à recente escassez de açúcar e à proximidade do Natal, uma empresa que produz açúcar refinado tem de entregar no mais curto espaço de tempo uma tonelada de açúcar em cada um de três hipermercados, H1, H2 e H3. Em cada uma das suas unidades fabris, U1, U2 e U3, a empresa tem três toneladas de açúcar refinado prontas para entrega. Na rede abaixo os arcos orientados representam as direcções possíveis do transporte rodoviário do açúcar e os valores junto aos arcos representam o tempo de transporte, em horas.



A produtora de açúcar refinado pretende planejar o transporte do açúcar das unidades fabris para os hipermercados de forma a minimizar o prazo de abastecimento de todos os hipermercados. Formalize este problema como um problema de otimização em redes e resolva-o.

14. A Polícia de Segurança Pública vai instalar corredores de segurança nas ruas da cidade por onde irão passar as comitivas dos países participantes num encontro sobre questões ambientais. Na rede abaixo o nodo E representa o local do encontro e os nodos 1 a 7 representam os locais de partida das comitivas. As arestas da rede representam o conjunto de ruas possíveis para instalar os corredores de segurança. Os valores junto às arestas representam as distâncias, em centenas de metros, entre os locais.



- a) Em que ruas devem ser instalados os corredores de segurança de modo a que a distância total percorrida pelas comitivas até ao local do encontro seja a menor possível?
- b) Supondo que o número de agentes da polícia necessários para cobrir uma rua é proporcional ao seu comprimento, que implicações tem na solução anterior a instalação de corredores de segurança que minimizam o número total de agentes?

15. Prove que, se numa rede $G = (V, A)$ conexa e não orientada a aresta de custo mínimo for única ela pertence a qualquer árvore geradora mínima de G .

16. Considere uma rede orientada $G = (V, A)$ com o comprimento de cada arco $(x, y) \in A$ representado por $c(x, y) > 0$. Admita que a cada vértice $v \in V$ se associa uma marca, $d(v)$, com o comprimento do caminho mais curto do vértice 1 para o vértice v . Prove que essas marcas verificam as seguintes desigualdades: $d(y) \leq d(x) + c(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$.

17. Dada uma rede de fluxos $G=(N,A)$ cujos arcos $(i,j) \in A$ têm capacidades $U_{ij} \geq 0$ e dado um fluxo, X , do nodo origem para o nodo destino, admissível em G , considere a rede $G(X)=(N,A(X))$ com $A(X) = \{(i, j) \in A: X_{ij} < U_{ij}\}$. Prove que se o fluxo X é máximo para G não existe nenhum caminho orientado em $G(X)$ do nodo origem para o nodo destino.

18. Com o objectivo de melhorar a segurança nas estradas, vai ser efectuada uma operação de fiscalização rodoviária nas vias que ligam Évora a Beja. Os arcos da rede abaixo representam as vias e o respectivo sentido de circulação do tráfego rodoviário. O valor junto a cada arco representa o custo (em milhares de euros) de instalação de aparelhos de controlo de velocidade na via por ele representada. O responsável pela operação pretende seleccionar as vias onde deverão ser instalados os aparelhos de controlo de velocidade para garantir que todos os veículos que efectuem o trajecto de Évora para Beja sejam controlados e que essa instalação tenha o menor custo possível. Formalize e resolva um problema de optimização em redes para identificar as vias que devem ser seleccionadas. Apresente o custo total de instalação dos aparelhos.

