ECONOMIA MATEMÁTICA MESTRADO DE 2011/2012

**Módulo de espaços métricos e teorias do ponto fixo e do hiperplano separador**

# I ESPAÇOS MÉTRICOS

## 1. Distância. Espaço métrico

Seja E um conjunto

Uma **métrica** ou **distância** em E é uma função

d: ExE → R tal que

1) Quaisquer que sejam x e y de E    $d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = 0$ se e só se $x = y$

3) Quaisquer que sejam x e y de E      $d(x,y) = d(y,x)$

4) Quaisquer que sejam x, y, z de E

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

O conjunto E, depois de definida uma distância, passa a designar-se por **espaço métrico**

Exemplos;

a) Num espaço $R^n$

$d(x,y) = [\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2]^{1/2}$

é uma distância, que se chama di**stância euclideana**

b) Seja C o conjunto de funções reais de variável real, limitadas e definidas num certo conjunto B e f e g duas funções de C

Então

$d(f,g) = \sup_B | f(x) - g(x) |$

é uma distância

c) Um espaço vectorial normado é um espaço métrico

Como se sabe, a norma de um espaço vectorial sobre o corpo R dos números reais é uma função do espaço em R tal que para quaisquer, x, y e z do espaço se tem

a) $||x||\geq 0$

b) $||x||= 0$ se e só se x for o elemento nulo do espaço vectorial

c) $||ax||=|a|||x||$ qualquer que seja o número real a

d) $||x+y||\leq||x||+||y||$

Quando num espaço vectorial está definida uma norma diz-se que o espaço é normado.

Fazendo $d(x,y) \equiv ||x-y||$

d(x,y) é um distância *(verifique)*

d) Seja um rede de indivíduos que comunicam entre si. Para cada par de indivíduos atribuímos um número natural que designamos por distância de comunicação, assim definido: se dois indivíduos comunicam directamente a distância de comunicação entre eles é 1. Se comunicam indirectamente, através de terceiros, a distância de comunicação é dada pelo mínimo de passos de comunicação que têm de ter para chegar ao outro. A distância de comunicação é uma distância no sentido acima exposto desde que se convencione que o valor é 0 para a comunicação de um indivíduo consigo próprio. Uma rede torna-se assim um espaço métrico.

## 2. Diâmetro. Conjuntos limitados. Esferas abertas

O **Diâmetro** de um conjunto A subconjunto de E é definido como

D(A) = sup{d(x,y)} para todos os x e y de A.

Quando o diâmetro é finito o conjunto diz-se **limitado**

Seja E um espaço métrico

Seja a um elemento de E e seja um número real $r > 0$

Definimos

**Esfera aberta de centro a e raio r** como sendo o conjunto

$N(a,r) = \{x \text{ de } E \mid d(x,a) < r\}$

## 3. Conjuntos abertos e fechados

Seja A um conjunto subconjunto de E.

Diz-se que o elemento a de A é um **ponto interior de A** se e só se existe um número real $r > 0$ tal que

N(a,r) está contida em A

Ao conjunto de todos os pontos interiores de A, chamamos o Interior de A e designamos por Int(A).

Claro que o Int(A) é subconjunto de A. Mas por vezes temos casos em que

Int(A) = A. Diz-se então que o **conjunto A é aberto**, ou seja, é constituído apenas por pontos interiores, O conjunto E é um conjunto aberto. Por convenção o conjunto Ø também é aberto.

Tente provar os seguintes teoremas

**Teorema 1**. Toda a esfera aberta é um conjunto aberto

**Teorema 2** A união de uma família qualquer (finita ou infinita, numerável ou não) de conjuntos abertos é um conjunto aberto

**Teorema 3** A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto

Note-se que na condição do teorema 3 o número de conjuntos tem de ser finito. Por exemplo, é fácil de ver que na recta real os intervalos abertos à esquerda e à direita são conjuntos abertos *(verifique*). Mas já a intersecção dos intervalos abertos (-1/n, 1/n) para todos os n naturais, que são em infinidade numerável, não é um conjunto aberto *(porquê?).*

Seja a um ponto de E. Então, um conjunto A é uma **vizinhança de a** se a pertencer a A e A for aberto.

Exemplo: as esferas abertas de centro a e raio r formam uma família de vizinhanças de a.

Seja um conjunto A, subconjunto de um espaço métrico.

Então o elemento x de E é um **ponto de acumulação do conjunto A** se para cada vizinhança de x existem pontos de A distintos de x.

Ou seja, para cada vizinhança V de x cumpre-se a condição

$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

O conjunto de pontos de acumulação de A representa-se por A´ e chama-se o **Derivado** de A. O derivado de um conjunto A pode ser vazio, isto é um conjunto pode não ter pontos de acumulação.

O conjunto $A \cup A'$ designa-se por **fecho** do conjunto A

Quando o conjunto $A'$ está contido em A, ou seja, quando este contém todos os seus pontos de acumulação dizemos que o conjunto A é **fechado.**

Provam-se os seguintes teoremas relativos a conjuntos fechados num espaço métrico

**Teorema 4** Um conjunto A é fechado se e só se o complementar E - A for aberto

**Teorema 5** A união de conjuntos fechados em número finito é um conjunto fechado. A intersecção de qualquer número (finito ou infinito, numerável ou não) de conjuntos fechados é fechado *(Demonstre).*

**Teorema 6** O fecho de um conjunto A é um conjunto fechado

Note-se que um conjunto pode ser simultaneamente aberto e fechado (caso por exemplo de E)

Um exemplo importante de conjunto fechado é a **esfera fechada de raio r e centro a** ou seja, o conjunto

$N^*(a,r) = \{x \text{ de } E \mid d(x,a) \leq r\}$

Note-se que o diâmetro de uma esfera fechada (ou aberta) de raio r é menor ou igual a 2r, mas não é necessariamente igual a 2r.*(De um exemplo de um espaço em que uma vizinhança de um certo raio r>0 tem diâmetro nulo*).

## 4. Coberturas. Conjuntos compactos

Sejam A um conjunto subconjunto de E e **F** uma família de conjuntos subconjuntos de E tal que A está contido em no conjunto união de todos os conjuntos F pertencentes a **F.** Então **F** é uma **cobertura** do conjunto A

Um conjunto A é compacto se toda a cobertura de A formada de conjuntos abertos admite uma subcobertura finita (ou seja uma família **F*** formada por um número finito de conjuntos abertos F* pertencentes a **F**).

Prova-se o seguinte teorema

**Teorema 7** Num espaço métrico qualquer, um conjunto compacto é limitado e **f**echado**.**

Num espaço $R^n$ a inversa também é verdadeira, pelo que *em* $R^n$ *um conjunto é compacto se e só se for limitado e fechado*.

*(Exercício: demonstre que dois conjuntos compactos que têm o mesmo fecho são iguais)*

Um exemplo de aplicação do conceito: **a dimensão fractal**.

Um conceito importante que pode ser definido em espaços métricos e que faz apelo ao conceito de conjunto compacto é o de dimensão fractal.

Um **Fractal** de forma pouco rigorosa pode definir-se como uma forma geométrica que pode ser dividida em partes tais que cada parte é aproximadamente um cópia do todo. Em geral trata-se de conjuntos muito complicados para serem descritos pelas geometrias habituais (é o caso, por exemplo, do conjunto que descreve a costa de um país).

A dimensão fractal é um número que nos ajuda a medir quão densamente o conjunto fractal ocupa o espaço

A definição é a seguinte definição:

**Dimensão fractal**. Seja E um espaço métrico e seja $\mathsf{H}$(E) a família de conjuntos compactos de E (com exclusão do conjunto vazio).Seja um conjunto A pertencente a $\mathsf{H}$(E) e para cada $\varepsilon > 0$ definamos $\mathcal{N}(A,\varepsilon)$ como sendo o menor número de esferas fechadas de raio $\varepsilon$ necessárias para cobrir A.

Se o número D assim definido

$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \{\log [\mathcal{N}(A,\varepsilon)]/\log(1/\varepsilon)\}$

existir, então D é chamada a ***dimensão fractal*** de A (log é o logaritmo natural)

Exemplos

Num espaço $R^2$, um ponto tem dimensão fractal 0, um segmento de recta dimensão fractal 1 e um rectângulo dimensão fractal 2. Para a costa da Grã-Bretanha calculou-se uma dimensão fractal aproximada de 1,2. A dimensão fractal do triângulo de Sierpinski é de log 3/log 2, ou seja, aproximadamente 1,58.

Um outro exemplo é o do comportamento dos mercados financeiros que tem sido estudado com recurso ao conceito de fractal.

## 5. Limites num espaço métrico

### Limites de sucessões

Seja uma sucessão $\{x_n\}$ de elementos de um espaço métrico E. Um ponto x de E é **limite da sucessão** se para cada vizinhança V de x existe um número natural N tal que para $n \geq N$ se tem $x_n$ a pertencer a V. Uma sucessão com limite diz-se **convergente.**

### Limites de funções

Seja f um função que a cada ponto x de um conjunto A subconjunto de um espaço métrico E faz corresponder um ponto f(x) de um espaço métrico F. Seja d a distância definida em E e d* a distância definida em F.

Seja a um ponto de acumulação de A.

Então b é o **limite de f no ponto a** e escreve-se b = $_{x \to a}$ lim f(x) se a cada $\delta > 0$ corresponder um $\varepsilon > 0$ tal que

qualquer que seja x de A, com $\varepsilon > d(x,a) > 0$ , se tem $\delta > d^*(f(x),b)$

**Teorema 8**. O limite, a existir, é único

**Teorema 9.** Se existe o limite b de f(x) quando x tende para a então para qualquer sucessão $\{x_n\}$ de elementos de A a tender para a tem-se a sucessão $\{f(x_n)\}$ a tender para b

Um função definida no conjunto A é **contínua** no ponto a, ponto de acumulação de A, se $_{x \to a}$ lim f(x) = f(a)

Uma sucessão $\{x_n\}$ é uma **sucessão de Cauchy** se, para cada número real $\delta > 0$ existe um número natural N tal que para todos os números n e n* não inferiores a N se tem

$d(x_n , x_{n^*}) < \delta$

Toda a sucessão convergente é de Cauchy. Mas a inversa não é sempre verdadeira.

Chamam-se **completos** os espaços métricos tais que toda a sucessão de Cauchy é convergente.

Exemplo: O espaço $R^n$ para qualquer n é completo. Mas já o espaço Q dos números racionais não é completo *(verifique*).

Os espaços vectoriais normados e completos chamam-se espaços de Banach. São muito utilizados na análise funcional uma vez que, por exemplo o espaço das funções reais de variável real contínuas e limitadas definidas num conjunto C é um espaço de Banach quando se define como norma $||f|| = \sup\{|f(x)|$ para todos os x de C.$\}$(*verifique que se trata de facto de uma norma)*

## 6. Isotopia

Dois espaços vectoriais E e F normados são **topologicamente isomorfos** se existe um transformação T: E→ F, linear (isto é,  tal que $T(\alpha x+\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$) contínua, não singular (isto é bijectiva) cuja inversa é também contínua.

Dois espaços toplogicamente isomorfos têm as mesmas propriedades, são por assim dizer indistinguíveis nessas suas propriedades.

**Teorema 10** Dois espaços normados de dimensão finita são topologicamente isomorfos.

As consequências do teorema 10 são muito importantes. Significam, por exemplo que, para um espaço $R^n$, não interessa qual a distância que se escolha, seja a euclideana seja outra qualquer, que chegaremos sempre às mesmas propriedades do espaço.

### Bibliografia

Iribarren, Ignacio T. (1973) *Topologia de espacios métricos* . Limusa-Wiley

# II TEORIA DO PONTO FIXO

## 1. Teoremas de Banach e Brouwer

O teorema mais geral do ponto fixo deve-se ao matemático polaco Banach (1892-1945).

Seja E um espaço métrico com a distância d.

Seja f(x) uma função f: E→ E.

Diz-se que f(x) é uma **contracção** se existe um número real k com $0 < k < 1$ tal que para quaisquer x, y de E se tem

$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$

**Teorema do ponto fixo** (Banach). Se E for um espaço métrico completo, se S for um conjunto fechado subconjunto de E e f for uma contracção definida em S, então existe um ponto fixo único, ou seja um único ponto x* de S tal que f(x*) = x*.

Observações.

Prova-se (Hu, 1967[1]) que, para ter a propriedade do ponto fixo é necessário que o espaço seja completo.

Este teorema tem importância nomeadamente no estudo dos sistemas dinâmicos, na determinação de atractores desses sistemas. Para isso define-se uma distância entre conjuntos na família H(E) dos conjuntos compactos não vazios de pontos do espaço métrico E (com a distância d), que é a chamada **distância de Hausdorff** (de Felix Hausdorff, matemático alemão, 1868-1942**)**.

A distância $d_H$ de Hausdorff para dois conjuntos A e B pertencentes a H(E) é assim definida

$d_H(A,B) = \max\{\sup_{x \text{ de } A} \inf_{y \text{ de } B} d(x,y) , \sup_{y \text{ de } B} \inf_{x \text{ de } A} d(x,y)\}$

Prova-se que $d_H$ é uma distância em H(E) e que se E for um espaço métrico completo com a distância d então H(E) também o é, o que permite aplicar o teorema anterior.

[1] Em *The American Mathematical Journal*, vol 74, nº4

Podemos, muitas vezes dispensar o carácter de contracção da função, que é uma condição muito restritiva, bastando supor que ela é contínua. Temos, assim o teorema de Brouwer (matemático holandês, 1881-1966) para espaços $R^n$.

**Teorema do ponto fixo** (Brouwer). Seja A um conjunto compacto e convexo[2] de $R^n$ e f uma função f: A→ A contínua em A. Então existe um elemento x* de A tal que

$f(x^*) = x^*$

Observações

1.O facto de não exigirmos que f seja uma contracção tem um duplo custo: por um lado o conjunto tem de ser convexo, além de compacto. Por outro lado, o ponto fixo não é necessariamente único.

2. O teorema de Brouwer foi generalizado em 1930 pelo polaco Schauder a espaços de Banach. Mais recentemente, em 2001, Robert Cauty generalizou-o para espaços ainda mais gerais, ou seja, para espaços vectoriais de Hausdorff (um espaço de Hausdorff é um espaço em que para cada ponto está atribuída uma família de vizinhanças e em que, dados dois pontos x e y distintos, existe uma vizinhança U de x e uma V de y tais que $U \cap V = \emptyset$).

3. O número de pontos fixos de uma função tem sido investigado desde os trabalhos de Nielsen (1890-1959) e também os de Lefschetz (1884-1972) a partir dos anos vinte do século passado. Esta matéria está no entanto, fora do nosso âmbito.

O teorema do ponto fixo de Brouwer utiliza-se frequentemente para determinar a existência de vectores de preços de equilíbrio.

## 2.Um aplicação do teorema de Brouwer: o equilíbrio de Walras

[2] Recorde-se que um conjunto C de um espaço vectorial sobre R é convexo se e só se quaisquer que sejam X e Y pertencentes a C os vectores Z tais que
$Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$ para $0 < \lambda < 1$ também pertencem a C

Seja um economia em que se trocam n mercadorias. Seja p o vector de preços das n mercadorias, $D_i(p)$ a função procura da mercadoria i, $S_i(p)$ a função oferta da mercadoria i e $Z_i(p) = D_i(p) - S_i(p)$ a função excesso de procura referente à mercadoria i.

Supõe-se válida a lei de Walras

$\Sigma\, p_i\, Z_i(p) = 0$

O modelo de Walras pressupõe a existência de um leiloeiro que, em cada momento t vai anunciando novos preços, alterando os preços anteriores. Se houver excesso de procura da mercadoria i, então o leiloeiro aumenta o preço de i. Se houver excesso de oferta, o leiloeiro diminui o preço de i.

Suponhamos ainda que os preços podem variar no simplex unitário P, ou seja no conjunto

$P = \{p \text{ de } R^n \text{ tais que } p_i \geq 0 \text{ e } \Sigma_i\, p_i = 1\}$

e que o leiloeiro vai alterando os preços ao longo dos momentos 1, 2,..,t,... de acordo com a regra

1) $p_i^t = \max[0, p_i^{t-1} + Z_i(p^{t-1})]/\Sigma_j \max[(0, p_j^{t-1} + Z_j(p^{t-1})]$

Temos assim uma função f: P→ P

$p^t = f(p^{t-1})$

que cumpre as condições de Brouwer. Logo, existe um ponto fixo p* que, demonstra-se, é um ponto de equilíbrio

$p^* = f(p^*)$

*Exercício*, Verifique, tendo em atenção a observação 2 seguinte, que f cumpre efectivamente as condições do teorema de Brouwer.

Observações

1- A justificação de se considerarem os preços pertencentes ao simplex P é que só interessam os preços relativos, pelo que se dividirmos cada preço $p_i$ pela soma $\Sigma$ $p_i$ obteremos novos preços $p_i^*$ que fazem parte do simplex e que não alteram os preços relativos, isto é quaisquer que sejam i e j $p_i/p_j= p^*_i/p^*_j$ .

2-. Prova-se que, verificando-se a lei de Walras, o denominador da expressão 1) é sempre positivo

**Bibliografia**

Iribarren, Ignacio (1973); *Toplogia de Espacios Metricos*.Limusa-Wiley

Starr, Ross M (1997); *General Equilibrium Theory*. Cambridge University Press

## III CORRESPONDÊNCIAS. O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI

Para certas aplicações da economia matemática, nomeadamente na teoria do equilíbrio e na teoria dos jogos (por exemplo, para provar a existência de um equilíbrio de Nash) é útil usar uma generalização do teorema de Brouwer.

Essa generalização é conhecida por teorema de Kakutani (matemático japonês,1911-2004).

O teorema de Kakutani aplica-se a correspondências e daí o seu maior grau de generalidade em relação ao teorema de Brouwer. Assim, vamos começar por referir alguns aspectos da teoria das correspondências

Vamos considerar apenas correspondências em espaços $R^n$.

### 1. Definição de correspondência. Utilização na Teoria Económica

Sejam A e B dois conjuntos, subconjuntos respectivamente de um espaço $R^m$ e $R^n$. Seja $2^B$ a família de todos os subconjuntos de B.

Uma correspondência F de A em $2^B$ (mais simplificadamente, embora incorrectamente, diz-se de A em B) é uma lei que associa cada elemento x de A a um conjunto F(x) subconjunto de B.

Ou seja o conceito de correspondência generaliza o conceito de função, uma vez que a cada elemento x de um conjunto A faz-se corresponder um *conjunto* subconjunt*o* de B e não um *elemento* de B.

A teoria das correspondências utiliza-se muitas vezes na teoria do consumidor.

Na teoria mais simples do consumidor as preferências de cada consumidor são consideradas *fortemente convexas*. Vamos ver o isto significa.

Suponhamos que existem m bens acessíveis ao consumidor. Suponhamos ainda que ele tem de escolher entre cabazes desses bens ou seja, entre vectores x,y,z,… de m componentes cada um, em que a componente i é uma dada quantidade, não negativa, do bem i. Suponhamos finalmente que ele tem uma escala de preferências tal que dados dois cabazes x e y ele sabe dizer de prefere y a x, (ou é-lhe indiferente y ou x) – situação que simbolizaremos por $y \geq x$, ou se prefere x a y (ou lhe é indiferente x ou y). No caso de y ser preferido a x , não lhe sendo indiferente y ou x, escreve-se $y > x$ (não confundir o símbolo $>$ de "preferência" ao símbolo > de "maior" que escrevemos num tipo menor).

As preferências são **fortemente convexas** se para cada par de cabazes não idênticos x e x*, em que x e x* são indiferentes para o consumidor (isto é nenhum é preferido ao outro) e para todos os números λ tais que $0 < \lambda < 1$ se tem $\lambda x + (1-\lambda)x^* > x$.

Ora, se as preferências são fortemente convexas, dada uma restrição orçamental

$p.x \leq M$, em que p é o vector dos preços dos m bens, x o vector das quantidades que o consumidor compra, M a quantidade de dinheiro de que ele dispõe e p.x é o produto

$p.x = \Sigma_i p_i x_i$ , existe **um e só um** cabaz x* tal que, para qualquer que seja outro cabaz z que cumpra a restrição orçamental se tem $x^* > z$ .

Com efeito, suponhamos que haveria dois cabazes/vectores x* e x** nestas circunstâncias. Então, nenhum deles pode ser preferido ao outro. Logo, sendo as preferências fortemente convexas, para todos os $\lambda$ entre 0 e 1 tem-se $\lambda x^* + (1-\lambda)x^{**} > x^*$, o que não pode ser pois nenhum cabaz é preferido a x*. Logo x* = x** e há um só cabaz que seria escolhido.

Sendo as preferências fortemente convexas existe, assim, uma função de procura para cada consumidor. Ou seja, uma função d(p, M) que a cada vector de preços e cada montante de dinheiro disponível faz corresponder um vector x de m componentes, que é o cabaz escolhido.

Simplesmente, se as preferências não forem fortemente convexas (e na realidade, não há grande razão para supor que o sejam) já não termos necessariamente uma função de procura.

Teremos, antes que a cada par (p, M) corresponde não um único cabaz **mas antes um conjunto de cabazes.**

A este conjunto chamaremos o ***conjunto da procura do consumidor.*** Designamo-lo por $\varphi(s, p)$ com $s = (\geq, M)$ e é definido da seguinte maneira

$\varphi(s,p)$ = {z de C(p,M): não existe nenhum x de C(p.M) tal que $x > z$}

em que C (p,M) é o conjunto de todos os x tais que $p.x \leq M$

Um caso em que as preferências não são fortemente convexas, mas que apresenta propriedades que permitem a existência de equilíbrios na economia é o das *preferências convexas*.

Uma ***relação de preferência $\geq$ é convexa*** se, para cada cabaz z , o conjunto de todos os cabazes x tais que $x \geq z$ é um conjunto convexo.

Ou seja se $x^* \geq z$ e $x^{**} \geq z$ então para todos os $\lambda$ tais que $0<\lambda<1$, os cabazes $x_\lambda$ ,com

$x_\lambda = \lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}$ são tais que $x_\lambda \geq z$, o que parece uma situação muito mais plausível que a das preferências fortemente convexas.

Uma outra propriedade que consideraremos nas preferências é que elas são monótonas, ou seja, que dados dois cabazes x e y diferentes tais que $0 \leq x \leq y$ se tem $y > x$. Esta é uma propriedade intuitiva e que é à partida realista.

Vimos, pois um exemplo da utilização de correspondências em teoria económica.

É a altura de continuarmos com a teoria das correspondências

**2 Semicontinuidade superior**

Sejam A e B dois conjuntos fechados, subconjuntos de espaços $R^m$ e $R^n$ respectivamente e seja $\varphi$ uma correspondência de A em B. Para simplificar a definição seguinte, vamos considerar que todos os conjuntos $\varphi$ (x) são fechados e que B é compacto

Neste contexto, diz-se que $\varphi$ é ***semi-contínua superior*** em x de A se, qualquer que seja a sucessão $\{x^n\}$,[3] n=1,2,… de elementos de A a tender para x e qualquer que seja a sucessão $\{y^n\}$ de elementos de B - com $y^n$ pertencente a $\varphi(x^n)$ para todos os n - a tender para y, se tem y pertencente a $\varphi(x)$.

Um exemplo de correspondência semicontínua superior (com $R^m=R^n = R$) e

A=[-1 0] e B = [-6 9] é

$-1 \leq x \leq 0 \quad \varphi(x) = \{y : x-5 \leq y \leq x+7\}$

$x=0 \qquad \varphi(0) = \{y: -6 \leq y \leq 9\}$

Um exemplo de uma correspondência que não é semicontínua superior será a anterior mas com B =[-6 7]$\cup$[8 9] e

$\varphi(0) = \{y: 8 \leq y \leq 9\}$

[3] A definição mais geral de semicontinuidade superior quando A não é necessariamente compacto ou $\varphi(x)$ fechado, é a seguinte: $\varphi$ é semicontínua em x se $\varphi(x)$ for não vazio e se para cada vizinhança U contida em $\varphi(x)$ existe uma vizinhança V de x tal que $\varphi(z)$ está contido em U para todos os z de V.

(*Verifique que as condições da definição se aplicam. Verifique que a primeira é semicontínua superior e a segunda não o é e represente graficamente as duas correspondências)*

Um teorema importante virá seguir. Antes, porém, duas definições.

O ***fecho convexo*** *(convex hull)* de um conjunto S de um espaço $R^p$ qualquer é a intersecção de todos os conjuntos convexos de $R^p$ que contêm S. Simboliza-se por coS e vê-se imediatamente que o fecho convexo de um conjunto convexo K é o próprio K.

Uma correspondência *tem* ***valores compactos*** se os φ(x) forem compactos.

Podemos enunciar agora o teorema.

**Teorema.** Seja φ de A de $R^m$ em $R^n$, com valores compactos e semicontinua superior em x. Então a correspondência coφ que a cada x faz corresponder o fecho convexo coφ(x) tem valores compactos e é semicontínua superior.

Antes de voltarmos de novo à Teoria Económica e ao consumidor ainda temos que definir um outro conceito que é o de *integral* de uma correspondência.

### 3. Integral de uma correspondência

Sela v uma medida num certo conjunto A[4] e F uma função de A num espaço $R^m$. A função f diz-se ***integrável*** com a medida v se cada componente $f^i$ (i=1,2,…m) for integrável. O integral $\int f dv$ de f é o vector ($\int f^1 dv$,.. $\int f^m dv$).

Designemos por Lφ o conjunto de todas as funções f integráveis com v que têm a propriedade de f(x) pertence a φ(x) em todo o conjunto A, salvo eventualmente num conjunto de medida v nula.

[4] Uma medida definida num conjunto A é uma função de conjunto, ou seja uma função v que a cada conjunto B pertencente a uma classe **M** de subconjuntos de A faz corresponder um número real v (B) e tem as seguintes propriedades:

V(Ø)=0

Se E está contido em F, ambos conjuntos de **M,** então v(E) ≤ v(F)

Sendo $\{E_i\}$ i=1,2,… uma sucessão de conjuntos de **M** dois a dois disjuntos, então $\Sigma v(E_i) = v(\bigcup E_i)$

Definimos o **integral ∫φdv da correspondência φ** como sendo o conjunto de todos os ∫fdv para todas as f pertencentes a Lφ. Por vezes simplifica-se a notação escrevendo apenas ∫φ.

É a altura de enunciarmos o teorema do Ponto Fixo de Kakutani

## 4.Teorema do Ponto Fixo de Kakutani

**Teorema.** Seja S um conjunto compacto e convexo, subconjunto de um espaço $R^n$. Seja φ uma correspondência semicontínua superior de S em S, tal que φ(x) é um conjunto convexo para cada x. Então existe um ponto fixo em S, isto é um ponto x* tal que x* pertence ao conjunto φ(x*).

Exemplo (em $R^1$)

Seja S o conjunto [0,1] e φ a correspondência

φ(x) = {1- x /4} (ou seja, para cada x um conjunto formada por só de um ponto)

para $0 \le x < 0{,}8$

φ(0,8) = [0,2 0,9]

φ(x) = {x/4}(ou seja, para cada x um conjunto formado por um só de um ponto)

para $1 \ge x > 0{,}8$

Constata-se facilmente que se verificam as condições do teorema e que φ tem um ponto fixo x* = 0,8.

Suponha agora que a correspondência era tal que

φ(0,8) = [0,2 0,7]

com tudo o resto igual à anterior.

*(Continuaria a haver um ponto fixo?Porquê?)*

Como dissemos, consideramos apenas espaços $R^n$. Mas, tal como o teorema de Brouwer, também o teorema de Kakutani é generalizável a espaços mais gerais, nomeadamente a espaços vectoriais de Hausdorff, o que foi realizado por Luciano de Castro em Julho de 2008.

É a altura de voltarmos à Economia e olharmos para uma aplicação deste teorema.

## 4. Uma economia de troca. Existência de preços de equilíbrio

Vamos considerar uma economia muito simplificada em que só existe troca de produtos e não produção. Existem m indivíduos e k bens. Cada indivíduo j dispõe de um cabaz inicial de bens $e_j$ que troca com os outros indivíduos. Assim, a dotação orçamental de cada indivíduo j, se o vector dos preços for p, será o valor $M_j = p.e_j$.

Por hipótese, as preferências são consideradas convexas mas não fortemente convexas.

Podemos agora definir a procura média da economia. Suponhamos quer há um número finito m de consumidores. Então a procura total da economia para cada vector de preços p é dada por

$\Phi^*(p) = \Sigma_j\ \varphi(s_j, p)$ em que o índice j se refere aos consumidores. *Note-se que esta notação do somatório (que é um conjunto e não um número) tem um significado especial: é o conjunto de todas as somas $\Sigma_j z_j$ de elementos $z_j$ um de cada conjunto $\varphi(s_j,p)$.*

A procura média será assim

$\Phi(p) = \Phi^*(p)/m$

Em que m é o número de consumidores.

Generalizando a um número infinito de consumidores ou a coligações de consumidores teremos

$\Phi(p) = \int\varphi(s,p)dv$ .

Por outro lado, como se disse, a economia dispõe inicialmente de um dotação de bens (note-se que não há produção, portanto só esse bens serão transaccionados).Cada consumidor j tem a sua dotações $e_j$ antes da troca pelo que o total da oferta de bens é dada pelo vector soma

$e^* = \Sigma_j e_j$

E a dotação média

$E = e^*/m$.

Mais geralmente

$E = \int e dv$

Então, para cada vector p de preços, podemos definir a função excesso de procura média Z(p) como sendo

$Z(p) = \Phi(p) - E$

Esta notação significa que cada elemento de Z(p) é obtido como sendo a diferença de cada elemento de Φ(p) menos o vector E.

Notemos ainda que se prova que se todos os consumidores tiverem preferências convexas a correspondência Φ tem valores convexos, ou seja, os conjuntos Φ (p) para todos os p são convexos.

Com estes conceitos podemos definir o conceito de equilíbrio de Walras.

***Equilíbrio de Walras***; Uma dotação de bens $f = (f_1, \ldots f_m)$ (sendo $f_j$ o cabaz do consumidor j) e um vector de preços p constituem um equilíbrio de Walras se:

a) para cada consumidor j $f_j$ pertence a $\varphi(s_j, p)$ em que o valor da dotação orçamental de j é $M_j = p.e_j$

b) $\int f dv = \int e dv$

Isso significa que haverá um equilíbrio se existe p* tal que 0 pertence a Z(p*). Neste caso p* é um vector de preços de equilíbrio[5].

Prova-se que Z(p) tem as seguintes propriedades

a) Para cada vector positivo de preços p e com z pertencente a Z(p) tem-se $p.z = 0$ (lei de Walras). Esta propriedade é fácil de verificar. Sendo as preferências monótonas, temos para cada consumidor j que, para cada cabaz x do conjunto $\varphi(s_j, p)$ se tem $p.x = p.e_j$ em

[5] Como é fácil de ver, Z(p) é tal que $Z(\lambda p) = Z(p)$ para $\lambda > 0$ e p de componentes positivas. Assim podemos considerar apenas vectores p normalizados, isto é tais que $\Sigma p^h = 1$.

que $e_j$ é o cabaz da dotação inicial de j. Somando para todos os j obtemos a lei de Walras.

b) a correspondência Z tem valores compactos e é semicontínua superior

c) Se a sucessão $p_n$ de vectores positivos tende para p que não é positivo então

$\inf\{\Sigma_h z^h$ para todos os z de $Z(p_n)\} > 0$ para n suficientemente grande (o somatório refere-se a todas as k componentes de z ou seja, a todos os bens do cabaz)

Com estas propriedades prova-se o seguinte

**Lema** Seja $\Delta$ o simplex $\Delta = \{ p : \Sigma p^h = 1, p^h \geq 0 \}$ e Z uma correspondência de $\Delta$ em $R^k$ com as propriedades a), b) e c) anteriores.

Então existe um vector positivo de preços p* tal que 0 pertence a coZ(p*)

Demonstração:

Para cada $n \geq m$

Seja $\Delta_n = \{$p tais que $\Sigma_h p^h = 1$ e $p^h \geq 1/n, h=1,..k \}, n \geq k$

Podemos usar o teorema de Kakutani (demonstra-se as condições do teorema se aplicam à correspondência coZ(p)) para a correspondência coZ(p) de $\Delta_n$ em $R^k$.

Assim, concluímos que existem vectores $p_n$ pertencentes a $\Delta_n$ e $z_n$ pertencentes a $R^k$ tais que

i)$z_n$ pertence a $coZ(p_n)$

ii) $p.z_n \leq 0$ para cada p de $\Delta_n$ $(n \geq k)$

Resta provar que $z_n = 0$ para algum n.

Seja p o limite da sucessão de $p_n$ quando n tende para infinito. O vector p tem as componentes todas positivas. Com efeito, se assim não fosse pela propriedade c) anterior e pela i) teríamos para n suficientemente grande

$\Sigma_h z_n^h > 0$ h=1,…k.

Mas tal entraria em contradição com ii). Então, p é estritamente positivo.

Sendo p estritamente positivo, seja n* tal que $\Delta_{n*}$ contém p no seu interior.

Para n suficientemente grande $p_n$ pertence ao interior de $\Delta_{n*}$ pelo que pela propriedade ii) se tem $z_n$=0. Com efeito, se houvesse alguma componente de $z_n$ que fosse positiva para m suficientemente grande e $p_m$ suficientemente próximo de p seria possível reduzir o valor dos produtos $|p^h_m\ z^h_n|$ correspondentes às componentes $z^h_n$ negativas e assim obter uma soma positiva, contrariando ii).

Então como $z_n$, pela propriedade i) pertence a $Z(p_n)$ $p_n$ é o p* tal que 0 pertence a coZ(p*) como se queria provar.

Ora com este lema provamos imediatamente a existência de um equilíbrio de Walras.

Com efeito, sendo as preferências convexas, então a procura média $\Phi$ também é convexa, e, portanto também a procura excedentária Z(p), ou seja os conjuntos $\Phi$(p)-E são convexos. Então coZ(p) coincide com Z(p), logo existe p* positivo tal que 0 pertence a Z(p*), como se queria provar.

Verificamos, assim, como a utilização do conceito de correspondência nos permite generalizar a demonstração da existência de um equilíbrio de Walras a uma situação em que as preferências, embora convexas não são fortemente convexas. Ganhámos, por consequência, em resultado de algum esforço adicional, mais realismo na análise..

## Bibliografia


Starr, Ross M. (1997); *General Equilibrium Theory*. Cambridge University Press

Hildenbrand, Werner (1974); *Core and Equilibria of a Large Economy*. Princeton University Press


# IV A TEORIA DA SEPARABILIDADE

A teoria da separabilidade tem muita importância para a demonstração de alguns resultados da Economia do Bem-estar (Welfare Economics)

**1.Teorema do hiperplano separador**

Comecemos por definir o conceito de hiperplano

**Definição (hiperplano)**

Seja um espaço $R^n$

Seja p um vector de $R^n$ não nulo.

Hiperplano H com a normal p e constante k é o conjunto

H= {x de $R^n$ tais que $p.x = k$}  em que k é um número real

O hiperplano H divide o espaço $R^n$ em duas metades:

- a metade superior que é o conjunto S ={x de $R^n$ tais que $p.x \geq k$} e a metade inferior I que é o conjunto I = {x de $R^n$ tais que $p.x \leq k$}

Se K é subconjunto de S ou de I então o hiperplano H diz-se l**imitador** (*bounding*) de K.

Importante é também a definição de hiperplano separador.

Dados dois conjuntos A e B se, para qualquer x de A e y de B existe um hiperplano de normal p tal que $p.x \geq p.y$ diz-se que H é um **hiperplano separador** de A e B.

Provam-se os seguintes Lemas

**Lema 1,** Seja K um conjunto não vazio, fechado e convexo de $R^n$ e seja w pertencente a $R^n$ mas não pertencente a K. Então existe y de K e p não nulo de $R^n$ tais que

$p.w < k = p.y \leq p.z$ para todos os z de K.

**Lema 2,** Se K for convexo e se z não pertence ao interior de K, então existe um hiperplano limitador de K que passa por z.

Com base nestes lemas demonstra-se o teorema do hiperplano separador

**Teorema (Hiperplano separador)** Sejam A e B subconjuntos de $R^n$, sendo A e B convexos, não vazios e disjuntos. Então, existe p de $R^n$ não nulo tal que

$p.x \geq p.y$ para todos os x de A e todos y de B.

O hiperplano de normal p diz-se então o hiperplano que separa A de B.

Demonstração.

Seja K o conjunto de todos os vectores x-y em que x pertence a A e y a B. K é convexo e, como A e B são disjuntos, 0 não pertence a K.

Consideraremos agora o conjunto $K \cup K'$ em que K' é o conjunto de pontos de acumulação de K. Então, como sabemos (teorema 6 da secção I) $K \cup K'$é fechado. É também convexo, pois o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Suponhamos que 0 não pertence a $K \cup K'$. Então pelo lema 1 anterior existe p não nulo de $R^n$ e v de $K \cup K'$ tais que

$p.w \geq p.v > p.0 = 0$ para todo o w de $K \cup K'$. Então, se w pertence a K, fazendo $w = x-y$ vem imediatamente $p.x>p.y=k$,

Se 0 é ponto de acumulação de K mas não pertence a K, então, pelo lema 2 existe um hiperplano limitador que passa por 0, ou seja tal que, qualquer que seja w de K $p.w \geq 0$ ou $p.w \leq 0$. Fazendo $w= x-y$ , se $p.w \geq 0$ teremos $p.x \geq p.y$; se $p.w \leq 0$ teremos $(-p).x \geq (-p).y$ e em qualquer caso temos um hiperplano a separar A de B.

Exercícios

1. Mostre, através de um exemplo gráfico, que o teorema do hiperplano separador só se demonstra para conjuntos A e B convexos

2.Em $R^2$ considere o simplex de ordem 2 e o círculo de centro no ponto (2,2) e de raio 1. Prove que existem hiperplanos que os separam e indique um valor para uma normal desses hiperplanos.

**2. Aplicação**

O teorema do hiperplano separador é utilizado, nomeadamente, para demonstrar o segundo teorema da Welfare Economics que nos diz que para qualquer alocação eficiente de recursos (isto é, que seja um óptimo de Pareto) existe um vector de preços de equilíbrio que lhe corresponde.

**Bibliografia**

Starr, Ross M (1997); *General Equilibrium Theory*. Cambridge University Press

**V EXERCÍCIOS**

1, Calcule o diâmetro do seguintes conjuntos

Nota: Nesta questão, (a b) indica o intervalo aberto de extremidades a e b

a) $[1\ 3] \cup (2\ 8)$ R: 7

b) $(1\ 5) \cap (4\ 7)$ R: 1

c) $(12\ 30) \cup \{4\}$ R: 26

d) $\{(x,y,z)$ de $R^3$ tais que: $x^2 + y^2 + z^2 < 5\}$ R : $2\sqrt{5}$

2, Indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações

a) $\cap\ [4 - 2/n \quad 4 + 2/n]$ para todos os n inteiros > 1 é um conjunto aberto R:F

b) O conjunto anterior é compacto R:V

c) O conjunto {x de R tais que $x \geq 5$} é compacto R:F

d) Para um dado z de um espaço $R^n$, o conjunto A = {x de $R^n$ tais que $d(x,z)<3$}é compacto R:F

e) O conjunto R -[R-{1}∩R-{2}] é compacto R:V

3, Considere as seguintes sucessões . Verifique se são sucessões de Cauchy

$U_n = (1+ 1/n)$ R :V

$U_n = 2^n$ R: F

4.Diga se pode garantir a existência de um ponto fixo para as seguintes funções

$F : R^2 \rightarrow R^2$definidas em espaços $R^2$. Nesta questão (a,b) indica um ponto de $R^2$

a) $F(x,y) = (2x^2y ,5y)$ no conjunto {(x,y) de $R^2$ tais que $x < y$} R: Não, o conjunto não é compacto

b) $F(x,y) = ((y^2+1)/x, x+y)$ no conjunto {(x,y) de $R^2$ tais que $x^2+y^2 \leq 4$} R; Não, a função não é contínua em todos os pontos do conjunto

c) A função da alínea a) no conjunto {(x,y) de $R^2$ tais que $x^2+y^2=1$}R: Não, o conjunto não é convexo.

5, Verifique se as seguintes correspondências R→R são semicontínuas superiores (x, y, etc são números reais)

a) $-1 \leq x < 0$ $\varphi(x) = \{y: x-7 \leq y \leq x-5 \}$

$x = 0$ $\varphi(x) = \{y: 6<y < 9 \}$

$0<x \leq 10$ $\varphi (x) = \{y:7+x<y \leq 8+x\}$

R: Não é semicontínua superior pois os valores y = x-5 tendem para y* = -5 quando x tende para 0 e -5 não pertence ao conjunto φ(0)

b) $0 \leq x < 3 \quad \varphi(x) = \{3x^2 + 1 \leq y \leq 5x^2+2\}$

$3 \leq x \leq 5 \quad \varphi(x) = \{y: 27 < y < 150\}$

$5 < x \leq 8 \quad \varphi(x) = \{y: 6x^2 \leq y < 6x^2+1\}$

R: Não é semicontínua superior porque os valores $y = 6x^2$ tendem para y* = 150 quando x tende para 5 por valores superiores a 5 e 150 não faz parte do conjunto φ(5)

6, Diga se pode garantir a existência de uma recta a separar os seguintes conjuntos A e B subconjuntos de um espaço $R^2$

a) $A = \{(x,y): x^2+y^2 < 1\}$ e $B = \{(x,y); x+y=2\}$

R: Sim, pelo teorema do hiperplano separador, dado que os conjuntos são convexos e disjuntos. Uma recta possível é x+y = 1,5

b) $A = \{(x,y): x^2+y^2<3\}$ e $B =\{(x,y): x+y=1 \text{ e } x,y \geq 0\}$

R: Não, são conjuntos convexos mas não são disjuntos}

c) A = C∩D com

$C=\{(x,y): x^2+y^2=2\}$ e D =[-6 6]x[-5 5] em que x indica produto cartesiano

e B = [-1 1]x[-1 1]

R: Não, pois embora A e B sejam disjuntos, A não é convexo

7. Considere a seguinte correspondência (note que para cada valor de x de a) e c) o conjunto φ(x) só tem um elemento)

a) $0 \leq x < 7 \quad \varphi(x) = \{10-x\}$

b) $x = 7 \quad \varphi(x) = [3 \;\; 20]$

c) $7 < x \leq 20$ $\varphi(x) = \{x-4\}$

Pode garantir que a correspondência tem pelo menos um ponto fixo? Porquê? Em caso afirmativo, indique dois pontos fixos

R: A resposta é afirmativa, porque se verificam as hipóteses do teorema de Kakutani, em especial o facto da correspondência ser semicontínua superior. Um ponto fixo é x=7,outro é x=5.

E a correspondência

a) $-6 \leq x < 7$ $\varphi(x) = \{1+x\}$

b) $x = 7$ $\varphi(x) = [-6\ 10]$

c) $7 < x \leq 20$ $\varphi(x) = \{(x+5)/2\}$

R: Sim , pela mesma razão. Tem só um ponto fixo, x=7

E se nesta correspondência a) e c) fossem as mesmas mas b) fosse a seguinte:

b) $x = 7$ $\varphi(x) = [-6\ 6] \cup [8\ 10]$

Não. A correspondência continua a ser semicontínua superior mas o conjunto $\varphi(7)$ não é convexo, pelo que não se verifica o teorema de Kakutani. Embora pudesse ter pontos fixos (as condições do teorema são suficientes mas não são necessárias), a correspondência não os tem.