Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Mathematical Economics
Exam – 14/01/08
Duration: 3h00

NOTE: Answer each group in separate sheets. Justify clearly all answers.

I

1. **(2.0)** Consider the following functions:

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \left(u-v, f\left(u^2\right)\right)\\ \Omega(s,t) &= (s, s+t)\,,\end{aligned}$$

where f is C^2 in R

(a) Write the Jacobian Matrices of Φ and Ω.

(b) Now, consider the composition of the two functions $w(u,v) = (\Omega \circ \Phi)(u,v)$. Construct explicitly the function $w = (w_1, w_2)$.

2. **(2.0)** Consider the following function

$$f(x) = (x+1)\,e^{-x}.$$

Compute the integral using integration by parts,

$$\int f(x)\,dx.$$

3. **(2.0)** Without using the definition of homogeneity show that the function $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ is homogeneous and indicate the degree of homogeneity.

II

1. **(3.5)** Consider the following correspondence $\varphi(x)$ where x is a real number and $\varphi(x)$ is a set of real numbers.

a) $0 \leq x < 1$, $\varphi(x) = \{x+2\}$

b) $x = 1$, $\varphi(x) = [0,5]$

c) $5 \geq x > 1$, $\varphi(x) = \{x-1\}$

Can the Theorem of Kakutani be used to assure that the correspondence has a fixed point? Justify your answer. Now consider that a) and c) remain the same and

b) $x = 1$, $\varphi(x) = \{0, 4, 5\}$. Can the Theorem of Kakutani be used to assure that the correspondence has a fixed point? Justify.

2. **(3.5)** Consider the following excess demand functions in a Walrasian model with two goods 1 and 2. p_1 and p_2 are respectively the prices of good 1 and 2.

$$\begin{aligned} Z_1(p_1, p_2) &= p_1 - p_2^2 - ap_1p_2 \\ Z_2(p_1, p_2) &= 3p_1^2 + p_1p_2 - \frac{p_1^2}{p_2} \end{aligned}$$

   (a) Without computing the equilibrium prices, indicate the value of a which guarantees the existence of those prices and explain why.

   (b) After answering the previous question, compute the equilibrium prices.

III

1. **(2.5)** Consider a continuous time version of a two-state Markov process $\dot{y} = My$, where the transition matrix is

$$M = \begin{pmatrix} -\pi_1 & \pi_1 \\ \pi_2 & -\pi_2 \end{pmatrix}$$

for $0 < \pi_1 < 1$ and $0 < \pi_2 < 1$

   (a) solve the differential equation;

   (b) let $y(0) = (0, 1)$. Solve the initial value problem;

   (c) draw the phase diagram associated to the initial value problem.

2. **(2.5)** Assume that that a consumer has an endowment denoted by W_t at time $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$. The horizon T is finite. The endowment evolves over time as $W_{t+1} = (1 + r)W_t - C_t$, where C_t is the amount of the endowment consumed at time t and $r > 0$ is a parameter. Assume that $W_0 = \phi > 0$ and that the consumer wants to have $W_T = \phi$. The consumer has a psychological discount factor $0 < \beta < 1$ and a static logarithmic utility function.

   (a) Transform the problem into a calculus of variations problem and determine the Euler-Lagrange equation.

   (b) Solve the problem.Consider a continuous time version of a two-state Markov process $\dot{y} = My$, where the transition matrix is

$$M = \begin{pmatrix} -\pi_1 & \pi_1 \\ \pi_2 & -\pi_2 \end{pmatrix}$$

   for $0 < \pi_1 < 1$ and $0 < \pi_2 < 1$

(c) solve the differential equation;

(d) let $y(0) = (0, 1)$. Solve the initial value problem;

(e) draw the phase diagram associated to the initial value problem.

3. **(2.0)** Assume that that a consumer has an endowment denoted by W_t at time $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. The horizon T is finite. The endowment evolves over time as $W_{t+1} = (1 + r)W_t - C_t$, where C_t is the amount of the endowment consumed at time t and $r > 0$ is a parameter. Assume that $W_0 = \phi > 0$ and that the consumer wants to have $W_T = \phi$. The consumer has a psychological discount factor $0 < \beta < 1$ and a static logarithmic utility function.

   (a) Transform the problem into a calculus of variations problem and determine the Euler-Lagrange equation.

   (b) Solve the problem.

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Mathematical Economics
Exam – 30/01/08 Duration: 3h00
NOTE: Answer each group in separate sheets. Justify clearly all answers

I

1. **(2,0)** Study the definiteness of matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. **(2,0)** Using the <u>chain rule</u>, compute $\frac{\partial z}{\partial t}$, at $t = 0$ for:

$$z(t, x, w) = \frac{5t^2 + 3x}{2w^2}, x(t) = t^2 + 1, w(t) = e^t + 1.$$

3. **(3,0)** Consider the following problem:

$$\min_{x,y} \; U = x^2 + (y - x)^2$$
$$s.t. \; x - 2y = b$$

   (a) Solve the minimization problem.
   (b) Construct the function $U^*(b)$ consisting on the maximum value of U for each b.
   (c) Compute $U^{*\prime}(b)$ and relate this value to the Lagrange multiplier. Justify carefully your answer.

II

1. **(3.5)** Consider the following two sets A and B of points of R^2

$$\begin{aligned} A &= [01] \times [a\ 5] \\ B &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

   ("$\times$" means Cartesian product of the two intervals and a is unknown)

   (a) Find the set of values of a that assures the existence of a hyperplane separating A and B. Justify
   (b) Choose one value for a and find one of those hyperplanes for that value of a.

2. **(3.5)** Consider the following correspondence, where $\varphi(x)$ are sets corresponding to each x.

$$a) \; -1 \leq x < 0 \; \varphi(x) = \{(x+2)/3\}$$
$$b) \; x = 0 \; \varphi(x) = [-13]$$
$$c) \; 0 < x \leq 4 \; \varphi(x) = \{(x-1)/3\}$$

Show that the theorem of Kakutani can be used to assure the existence of a fixed point. Find a fixed point.

III

1. **(2.0)** Consider the ode $\dot{y}\hat{E} = -1 + \lambda y$ where $\lambda > 0$.

   (a) Solve the differential equation.

   (b) Consider the terminal condition $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} y(t) = 0$. Solve the terminal value problem.

2. **(2.0)** Let $y_t \in \mathbb{R}^2$ and consider the planar difference equation $y_{t+1} = Ay_t + B$ for $A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}, where B = (1, 0)$.

   (a) Solve the difference equation;

   (b) Assume that $y_{1,0} = 3/15$ and that $\lim_{t\to\infty} y_{2t} = \overline{y}_{2t}$, where $\overline{y}_{2t}$ is the steady state level for y_{2t}. Determine the solution of the initial-terminal value problem.

3. **(2.0)** Assume that a consumer has an endowment $W(t)$ at time $t \in [0, T]$, where T is finite. He/she wants to consume it totally until time t, such that $W(T) = 0$. The endowment accumulates according to the equation $\dot{W} = C(t) - rW(t)$ where $r > 0$ and is constant. Initially $W(0) = \phi > 0$. The consumer has a psychological rate of time preference $\rho > 0$ and a static logarithmic utility function.

   (a) Determine the first order conditions from the Pontryiagin's maximum principle.

   (b) Solve the problem.

Instituto Superior de Economia e Gestão
Universidade Técnica de Lisboa

Economia Matemática

Exame – 07/01/09 Duração: 2h30

NOTA: Responda a cada grupo em **folhas separadas**. Justifique claramente todas as respostas.

Grupo I (5 val)

1. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) (2.0 val.) Calcule a inversa da matriz B.

   (b) (3.0 val.) Proceda à diagonalização da matrix B. Calcule B^3.

Grupo II (7 val)

1. (4.0 val) Considere a seguinte correspondência de $[0\ 5]$ em $[0\ 5]$:

$$\begin{array}{rcll} 0 & \leq & x < 2 & \varphi(x) = \{x+0,2; x+0,4\} \\ x & = & 2 & \varphi(x) = [a\ b] \\ 2 & < & x \leq 5 & \varphi(x) = \{x-1\} \end{array}$$

   (a) (2.0 val) Indique, **justificando** a resposta, dois valores possíveis para a e b que garantam que a correspondência é semicontínua superior em todos os pontos de $[0\ 5]$.

   (b) (2.0 val) Nesse caso pode ser utilizado o teorema de Kakutani para provar a existência de um ponto fixo? **Justifique.**

   NOTE BEM : O símbolo $\{u; v\}$ representa o conjunto de dois elementos, u e v e não o intervalo de extremidades u e v.

2. (3.0 val) Considere um espaço R^2 e os seguintes conjuntos A, B, C e D

$$\begin{array}{rcl} A & = & [1\ 3] \\ B & = & (0\ 5) \\ C & = & \{(x, y) \text{ de } R^2 \text{ tais que } (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq r^2\} \\ D & = & A \times B \end{array}$$

   (a) (1.5 val) Indique um valor de r que permita garantir que existe um hiperplano a separar C de D.

(b) (1.0 val) Indique as razões que lhe permitem justificar a resposta à questão anterior.

(c) (0.5 val) Apresente a equação de um hiperplano separador.

NOTE BEM: O símbolo "$\times$" representa o produto cartesiano de conjuntos e $(a\ b)$ representa o intervalo aberto de extremidades a e b.

Grupo III (8 val.)

$\frac{dp(t)/dt}{p(t)}$

1. (2.0 val) A taxa de rendimento de uma acção, é igual à taxa de variação da sua cotação, $\dot{p}/p$, mais o ratio entre o dividendo e a cotação , $d/p(t)$. Em equilíbrio, com ausência de oportunidades de arbitragem e previsão perfeita, a taxa de rendimento da acção deverá ser igual à taxa de juro do mercado, r, que se admite constante e positiva.

   (a) Escreva e resolva a equação diferencial ordinária para a cotação da acção. Forneça uma ilustração geométrica.

   (b) Excluem-se bolhas especulativas se se admitir que $\lim_{t\to\infty} p(t)e^{-rt} = 0$. Qual seria a expressão para a cotação, em função de $t \in [0, \infty)$, se aquela hipótese se verificar ? Interprete os resultados obtidos.

2. (3.0 val) Considere a equação às diferenças planar $y_{t+1} = Ay_t + B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Resolva a equação às diferenças (sugestão: Considere separadamente os casos $b = 0$ e $b \neq 0$).

   (b) Desenhe o diagrama de fases.

3. (3.0 val) Admita que um consumidor tem uma dotação, cuja quantidade no início do período $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ é designada por W_t, com T finito. A dotação evolui de acordo com a equação $W_{t+1} = (1 + r)W_t - C_t$, em que C_t é a quantidade consumida ao longo do período t, e $r > 0$ é um parâmetro. Admita que $W_0 = \phi > 0$ e que o consumidor pretende ter a dotação final $W_T = \phi$. O consumidor quer determinar uma trajectória óptima para para a dotação, usando uma função de utilidade intertemporalmente aditiva, em que a função de utilidade para o período t é $\ln(C_t)$, e há um factor de desconto psicológico igual a $\beta \in (0, 1)$.

   (a) Exprima o problema como um problema de cálculo das variações, e escreva as condições de primeira ordem.

   (b) Determine a solução do problema.

Instituto Superior de Economia e Gestão
Mestrado em Economia Monetária e Financeira e Mestrado em Economia

Economia Matemática
Exame – 27/01/09 Duração: 2h30

NOTA: Responda a cada grupo em folhas separadas. Justifique claramente todas as respostas.

Grupo I (5.0 valores)

1. (2.0 val.) Considere a função $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$. Suponha que x e y são função de t: $x(t) = \frac{1}{2}t^2$, $y(t) = ln(t)$. Calcule a derivada $\frac{\partial f}{\partial t}$.

2. (3.0 val.) Determine se a função $f(x,y) = x^2y$ é côncava ou convexa no domínio $\{x > 0, y > 0\}$.

Grupo II (7.0 valores)

1. (4.0 val.) Considere o seguinte intervalo A de R, $A = [0\ 1]$ e também a função real definida sobre A, $f(x) = ax/(x+1)$

   (a) (3.0 val.) Determine o conjunto de todos os valores de a que permitem garantir, através da aplicação do teorema do ponto fixo de Brouwer, a existência de um ponto fixo de f em A

   (b) (1.0 val.) Suponha agora que $A = [0 \quad 0,5] \cup [0,7 \quad 1]$ e que a toma o valor $a = 0,5$. Continuará a ser aplicável o teorema de Brouwer? Justifique.

2. (3.0 val) Sejam os seguintes conjuntos A e B de R^2

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) : 2x + 3y \leq 1\} \\ B &= \{(x,y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

   Diga, justificando, se podemos usar o Teorema do Hiperplano Separador para provar a existência de um hiperplano a separar A de B.

Grupo III (8.0 valores)

1. (3.0 val.) Considere a equação diferencial ordinária planar $\dot{y} = Ay + B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine a solução da equação diferencial.

   (b) Desenhe o diagrama de fases e discuta o resultado obtido.

   (c) Seja $y(0) = (0,0)$. Resolva o problema de valor inicial.

2. (2.0 val.) Considere a equação às diferenças $y_{t+1} = -3/2y_t - 1/2$.

   (a) Determine a sua solução e caracterize-a.

   (b) Seja $y_0 = 0$. Resolva o problema de valor inicial. Desenhe o diagrama das iterações (*iteration map*).

3. (2.0 val.) Admita que um consumidor tem um recurso, cuja quantidade no início do período $t \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ é designada por W_t. A dotação é consumida na quantidade C_t ao longo do período t. A dotação inicial é $W_0 = \phi > 0$. O consumidor quer determinar uma trajectória óptima para a dotação, que se admite assumir valores não negativos assintoticamente, usando um função de utilidade intertemporalmente aditiva, em que a função de utilidade para o período t é isoelástica, $\frac{1}{1-\sigma}(C_t)^{1-\sigma}$, com $\sigma > 0$ e um factor de desconto psicológico igual a $\beta \in (0, 1)$.

   (a) Exprima o problema como um problema de controle óptimo e escreva as condições de óptimo de primeira ordem segundo o princípio de Pontryagin's.

   (b) Determine a solução do problema.

Exame da Época Normal 2009/2010
Economia Matemática
Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Duração: 2h30

Responda a cada grupo em folhas de ponto separadas. Não são permitidas calculadoras gráficas, nem telemóveis.

Bom Trabalho

Grupo I

1. (4 valores) Seja $f : R^n \to R$ dada por:

$$f(x_1, x_2) = log\,(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha})$$

com $\alpha > 0$.

(a) (1 valor) Como se define, sem recurso a diferenciabilidade, uma função côncava?

(b) (3 valores) Mostre que a função f é côncava.

2. (3 valores) Determine o máximo e o mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ no círculo unitário, $x^2 + y^2 = 1$,usando o método de Lagrange. Resolva o mesmo problema usando o método de substituição. Obtém os mesmos resultados? Porquê, ou porque não?

Grupo II

1. (3,5 valores) Considere a seguinte correspondência φ definida em $S = [2\ 10] \subset R$:

$$\begin{array}{rcl} 2 & \leq & x < 5\varphi(x) = \{x + 2\} \\ x & = & 5\varphi(x) = [a\ b] \cup [c\ 8] \\ 5 & < & x \leq 10\varphi(x) = [x - 3\ x - 1] \end{array}$$

(a) (3 valores) Indique três valores, um para cada um dos números a, b e c, que permitam aplicar o teorema do ponto fixo de Kakutani . Justifique.

(b) (0,5 valores) No caso anterior, calcule um ponto fixo.

2. (3,5 valores) Considere os seguintes conjuntos A e B de R^2:

$$\begin{array}{rcl} A & = & [0\ 2] \cup (a\ 4] \times [1\ 3] \\ B & = & \{(x, y) \in R^2 : y \geq b - x\} \end{array}$$

(o símbolo "$\times$" representa o produto cartesiano de conjuntos)

(a) (3 valores) Indique o menor valor de a e um valor para b que permitam garantir que existe uma recta a separar os conjuntos A e B. Justifique.

(b) (0,5 valores) No caso anterior, apresente a equação de uma dessas rectas.

Grupo III

1. (1 valor) Considere a equação $y_{t+1} = \alpha y_t - 1$, para $\alpha > 0$.

   (a) (0,5 valores) Determine a solução da equação às diferenças para os diferentes valores de α.

   (b) (0,5 valores) Admita a condição terminal $\lim_{t \to +\infty} \alpha^{-t} y_t = 0$. Discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de valor terminal. Determine a solução do problema, caso exista.

2. (2 valores) Considere a equação planar

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1+\alpha)k_t - \alpha h_t + c + (1-\gamma)k_t \\ h_{t+1} &= -\beta k_t + (1+\beta)h_t + c + (1-\gamma)h_t \end{aligned}$$

   em que $c > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.

   (a) (1 valor) Faça uma representação matricial e determine os valores próprios da matriz dos coeficientes de (k_t, h_t).

   (b) (1 valor) Obtenha o diagrama de bifurcação no espaço $(\gamma, \alpha + \beta)$, indicando os tipos de diagramas de fases que poderão existir.

3. (3 valores) Considere o problema de controle óptimo: $\max_{\{u\}} \sum_{t=0}^{3} y_t - (2 - u_t)^2$ sujeito a $y_{t+1} = 1/2(y_t - u_t)$ e a $y_0 = 0$ e $y_4 = 45/2$.

   (a) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem segundo o princípio de Pontriyagin.

   (b) (2 valores) Resolva o problema, ou seja, obtenha as sequências óptimas $\{y_t^*\}_{t=0}^{4}$ e $\{u_t^*\}_{t=0}^{4}$

Exame da Época de Recurso 2009/2010
Economia Matemática
Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Duração: 2h30

Responda a cada grupo em **folhas de ponto separadas**. Exames que não respeitam esta condição **não serão corrigidos.** Não são permitidas calculadoras gráficas, nem telemóveis.

Bom Trabalho!

Grupo I

1. (4 valores) Considere o problema de maximização:

$$\max_{x,y} f(x,y) = x^3 + y^3 \quad s.a. \quad x + y = 1$$

   (a) (2 valores) Mostre que o problema não tem solução e discuta este resultado à luz do Teorema de Weierstrass.

   (b) (2 valores) Mostre que, se o Metodo de Lagrange fosse utilizado, os pontos críticos da Lagrangeana teriam uma solução única. Determine se este ponto seria um máximo ou um mínimo global.

2. (3 valores) Considere o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y}(x-1)^2 + (y-2)^2, \ s.a. \\ 4 &\geq 2y + x, \\ 20 &\geq 3y + 10x, \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Verifique que no óptimo existe apenas uma restrição activa, nomeadamente a primeira.

Grupo II

1. (3,5 valores) Considere uma economia competitiva em que se trocam dois bens, 1 e 2 e para os quais se conhecem as respectivas funções de procura (D_i) e oferta (S_i):

   Bem 1:

$$\begin{aligned} D_1 &= p_2 - p_1^2 p_2 \\ S_1 &= \alpha p_1 p_2^2 - p_2^2 + p_1 p_2 \end{aligned}$$

   Bem 2:

$$\begin{aligned} D_2 &= p_1^3 - p_1 p_2 - p_1 \\ S_2 &= 3p_1^2 p_2 - p_1^2 \end{aligned}$$

   (a) (2 valores). Determine o valor de α que permite calcular o vector de preços de equilíbrio.

   (b) (1,5 valores) Verifique que, para esse valor, $p_1 = 0,842$ e $p_2 = 0,158$ são, aproximadamente, preços de equilíbrio e calcule o valor do erro de aproximação para cada um dos mercados.

2. (3,5 valores) Considere a seguinte correspondência φ definida no intervalo $[0,5 \quad 2]$ de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0.5 &\leq x < 1, \ \varphi(x) = \{1, 5x\} \\ x &= 1, \ \varphi(1) = [a \quad b] \\ 1 &< x \leq 2, \ \varphi(x) = [x - 0.5 \quad x - 0.4] \end{aligned}$$

   (a) (3 valores) Indique um valor para a e outro para b que permitam aplicar o Teorema de Kakutani para provar a existência de um ponto fixo da correspondência.

   (b) (0,5 valores) Com esses valores, calcule um ponto fixo.

Grupo III

1. (1 valor) Considere a equação $y_{t+1} = -1/2y_t + 3/2$.

   (a) (0,5 valor) Determine a solução da equação às diferenças e caracterize-a.

   (b) (0,5 valor) Seja $y_0 = -1$. Resolva o problema de valor inicial. Desenhe o diagrama das iterações (*iteration map*).

2. (2 valores) Considere a equação às diferenças planar $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) (1,5 valores) Determine a solução da equação às diferenças. Caracterize-a qualitativamente.

   (b) (0,5 valor) Suponha que $\mathbf{y}_0 = (1, -1)^\top$. Obtenha a solução do problema de valor inicial.

3. (3 valores) Considere o seguinte problema de investimento óptimo para uma empresa: determinação da sequência de investimento, $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$, que maximiza o funcional objectivo $\sum_{t=0}^{\infty}(1+r)^{-t}\pi_t$, onde $r > 0$ é taxa de juro de mercado. O *cash flow* no período t é denotado por $\pi_t = AK_t - I_t(1 + \xi I_t)$, em que K_t representa o stock de capital, e $A > 0$ e $\xi > 0$ são parâmetros de produtividade e de custo de investimento, respectivamente. O problema tem como restrições, a equação de acumulação do stock de capital $K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$, em que $\delta \in [0, 1)$ é a taxa de depreciação do capital, e o stock de capital inicial é dado por $K_0 = \phi > 0$. Suponha que $A > r + \delta$.

   (a) (1 valor) Exprima o problema como um problema de cálculo de variações e determine as condições de primeira ordem de óptimo.

   (b) (2 valores) Determine a solução do problema como uma função explícita para K_t. Justifique e forneça uma intuição económica para a solução que obteve.

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Economia Matemática
Ano Lectivo de 2010/2011 – Exame da Época Normal
Duração: 2h30

Antes de iniciar o teste, tenha em atenção os seguintes aspectos:

- Não é permitida a consulta de qualquer material de apoio, nem de calculadoras gráficas;
- Desligue e arrume o telemóvel;
- Responda a cada um dos 3 **grupos** de questões em folhas separadas e correctamente identificadas;
- Apresente todos os cálculos que efectuar e não apenas os resultados finais;
- Justifique todas as suas respostas

Grupo I

1. (6,5 valores) Seja $W(x, y, y)$ a função que representa a relação entre a produção de x, y e z e o bem estar social. O objectivo deste problema é obter o bem estar social máximo dadas as restrições existentes na economia para a produção de x, y e z. Nomeadamente:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z} W(x,y,z) &= a\log x + b\log y + c\log z, \text{ s.a.} \\ & 2x + y + 3z \leq 600 \\ & x + 2y + z \leq 550 \\ 1 &\leq x, 1 \leq y \text{ e } 1 \leq z \end{aligned}$$

   Sendo os parâmetros $a, b, c > 0$.

   (a) (0,5 valor) Defina as funções $h_i(x, y, z), i = 1, ..5$ que representam as restrições deste problema para que o Teorema de Kuhn-Tucker possa ser utilizado.

   (b) (2 valores) Seja o conjunto D definido por

   $$D = \{(x, y, z) : h_i(x, y, z) \geq 0 \ , i = 1, .., 5\}.$$

      i. O conjunto D é compacto? Justifique.

      ii. A função W tem um máximo no conjunto D? E um mínimo? Justifique.

(c) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem do teorema de Kuhn-Tucker que têm de ser resolvidas para que se obtenha um ponto de máximo de W no conjunto definido pelas restrições.

(d) (1 valor) Escreva as condições de complementariedade do Teorema de Kuhn-Tucker deste problema.

(e) (2 valores) Suponha que o ponto óptimo do problema ocorre quando (x, y, z) = (50, 200, 100). Mostre que o teorema de Kuhn-Tucker se pode aplicar neste caso.

Grupo II

1. (2,5 valores) Considere a seguinte economia de troca em que existem só dois bens:1 e 2. As funções de oferta (S) e procura (D) de cada bem são, respectivamente:

   Para o bem 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4p_1p_2^2 - p_1 g(p_2) \\ D_1 &= 4p_1p_2^2 - 3p_1^2p_2 \end{aligned}$$

   Para o bem 2:

$$\begin{aligned} S_2 &= -p_1p_2 + p_1^2p_2 \\ D_2 &= -p_1p_2 + 3p_1^3 \end{aligned}$$

   Encontre a expressão analítica da função $g(p_2)$ que permite garantir a existência de um vector de preços de equilíbrio de Walras e calcule esse vector.

2. (4 valores) Seja a seguinte correspondência:

$$\varphi : [0 \quad 1] \rightarrow 2^{[0 \quad 1]}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(2-x)}{2}, \text{ Para } 0 \leq x < 0,5 \\ [a \quad b], \text{ Para } x = 0,5 \\ \frac{1}{(0,7+x)}, \text{ Para } 0,5 < x \leq 1 \end{cases}$$

   Indique o maior valor de a e o menor valor de b que permitem garantir a existência de um ponto fixo através do teorema de Kakutani. Determine esse ponto e prove que, neste exercício, ele é único.

Grupo III

1. Considere uma economia descrita pelas seguintes equações: (1) uma função de produção $Y_t = AK_t$, em que Y_t é produção, K_t é o stock de capital e A é um parâmetro de produtividade; (2) uma função poupança Keynesiana, $S_t = sY_t$, em que $0 < s < 1$ é a propensão marginal a poupar; (3) uma função investimento, $I_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t$ em que $0 < \delta < 1$ é a taxa de depreciação do capital; e (4) a equação de equilíbrio $S_t = I_t$. Admita que o nível inicial do stock de capital, $K_0 > 0$, é conhecido.

(a) Obtenha uma equação às diferenças escalar em K_t.

(b) Resolva o problema de valor inicial associado.

(c) Caracterize a solução. Faça uma representação geométrica.

2. Considere a equação às diferenças planar $y_{t+1} = Ay_t$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}, 0 < a < 1$$

(a) Determine a solução geral da equação planar

(b) Desenhe o diagrama de fases. Comente os resultados obtidos.

3. Considere o problema de cálculo das variações $\max_y \sum_{t=0}^{T} -\left(y_{t+1} - 2y_t\right)^2$ com $y_0 = 1$ e $\lim_{t\to\infty} y_t = 0$.

(a) Obtenha a condição de Euler-Lagrange;

(b) Obtenha a solução do problema.

itbpF2.1871in0.6045in0inFigure

Economia Matemática

Ano Lectivo de 2010/2011 – Exame da Época de Recurso

Duração: 2h30

Antes de iniciar o teste, tenha em atenção os seguintes aspectos:

- Não é permitida a consulta de qualquer material de apoio, nem de calculadoras gráficas;
- Desligue e arrume o telemóvel;
- Responda a cada um dos 3 **grupos** de questões em folhas separadas e correctamente identificadas;
- Apresente todos os cálculos que efectuar e não apenas os resultados finais;
- Justifique todas as suas respostas

Grupo I

1. (6,5 valores) Considere a função

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$$

definida em $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) : x, y \geq 0\}$.

(a) (1,5 valor) Determine o(s) ponto(s) críticos da função no interior do domínio definido. (dica: no óptimo, teremos $x^* = y^*$)

(b) (0,5 valor) Determine o(s) ponto(s) crítico(s) da função $g(x) = f(x,0)$, $x \geq 0$, i.e.ao longo da fronteira $y = 0$. Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de $g(x)$.

(c) (0,5 valor) Determine e classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de $h(y) = f(0,y)$, $y \geq 0.$, i.e.ao longo da fronteira $x = 0$. Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de $h(y)$.

(d) (1,5 valores) Compare as soluções obtidas em **b**, **c** e **d** em termos do valor da função. Analise ainda o ponto $f(0,0)$. Explique a necessidade desta análise.

(e) (3,0 valores) Considere agora o seguinte problema:

$$\max_{x,y} f(x,y) \text{ s.a. } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x+y \leq \frac{3}{4}$$

i. (1,0 valor) Apresente as condições de primeira ordem e de complementariedade do teorema de Kuhn-Tucker aplicado a este problema.

ii. (1,5 valor) Verifique se existe uma solução em que apenas a restricção $x+y \leq \frac{3}{4}$ é activa.

Grupo II

1. (2,5 valores) Considere a seguinte economia de troca em que existem só dois bens:1 e 2. As funções de oferta (S) e procura (D) de cada bem são, respectivamente:

   Para o bem 1:

$$\begin{aligned} S1 &= f(p_1,p_2)+p_1 g(p_1,p_2) \\ D1 &= f(p_1,p_2)+2p_1p_2 \end{aligned}$$

   Para o bem 2:

$$\begin{aligned} S_2 &= h(p_1,p_2)+2p_1^2 \\ D_2 &= h(p_1,p_2)+p_1 \end{aligned}$$

   Encontre as condições que permitem garantir a existência de um vector de preços de equilíbrio de Walras e calcule esse vector.

2. (4 valores) Seja um espaço $\mathbb{R}^2$ e os seguintes conjuntos do espaço:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}, \\ B &= [0,5 \quad 1,5]\times[0,5 \quad 1,5] \end{aligned}$$

   em que $\times$ é o símbolo de produto cartesiano de conjuntos, e

$$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : k-y \leq x\}.$$

   Considere ainda o conjunto

$$D = A \cap B$$

   Indique, caso exista, um valor de k, que seja menor que 2 e que permita garantir a existência de um hiperplano a separar D e C. Justifique detalhadamente.

   Sugestão: represente graficamente os conjuntos envolvidos.

Grupo III

1. (1,5 valores) Considere a equação $y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + 2$.

   (a) (0,5 valor) Determine a solução da equação às diferenças.

   (b) (0,5 valor) Desenhe o gráfico de iterações.

   (c) (0,5 valor) Admita a condição terminal $\lim_{t\to+\infty} y_t = \overline{y}$ em que $\overline{y}$ é o equilíbrio estacionário. Discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de valor terminal. Determine a solução do problema, caso exista.

2. (2 valores) Considere a equação às diferenças planar $y_{t+1} = Ay_t$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

   (a) (1 valor) Determine a solução da equação às diferenças.

   (b) (1 valor) Desenhe o diagrama de fases e caracterize o comportamento dinâmico do modelo.

3. (3,5 valores) Seja o problema do consumidor com a função objectivo

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \text{ sujeito a,}$$
$$W_{t+1} = (1-\delta)W_t - Ct,\ W_0 = \phi > 0,\ \lim_{t\to+\infty} W_t \geq 0$$

   Suponha que $\sigma > 0$, $< \beta < 1$ e $0 < \delta < 1$ e que $\beta^{\frac{1}{\sigma}} < (1-\delta)^{1-1/\sigma}$.

   (a) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem segundo o princípio de Pontriyagin. Represente o sistema canónico como uma equação às diferenças planar em $(C; W)$.

   (b) (2,5 valores) Resolva o problema, ou seja, obtenha as sequências óptimas $\{W_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ e $\{C_t^*\}_{t=0}^{\infty}$. Comente os resultados obtidos.