



Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Mathematical Economics
Exam – 14/01/08
Duration: 3h00

NOTE: Answer each group in separate sheets. Justify clearly all answers.

I

1. **(2.0)** Consider the following functions:

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= (u - v, f(u^2)) \\ \Omega(s, t) &= (s, s + t),\end{aligned}$$

where f is C^2 in R

- (a) Write the Jacobian Matrices of Φ and Ω .
(b) Now, consider the composition of the two functions $w(u, v) = (\Omega \circ \Phi)(u, v)$. Construct explicitly the function $w = (w_1, w_2)$.
2. **(2.0)** Consider the following function

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Compute the integral using integration by parts,

$$\int f(x) dx.$$

3. **(2.0)** Without using the definition of homogeneity show that the function $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ is homogeneous and indicate the degree of homogeneity.

II

1. **(3.5)** Consider the following correspondence $\varphi(x)$ where x is a real number and $\varphi(x)$ is a set of real numbers.
- a)** $0 \leq x < 1$, $\varphi(x) = \{x + 2\}$
b) $x = 1$, $\varphi(x) = [0, 5]$
c) $5 \geq x > 1$, $\varphi(x) = \{x - 1\}$

Can the Theorem of Kakutani be used to assure that the correspondence has a fixed point? Justify your answer. Now consider that a) and c) remain the same and

b) $x = 1$, $\varphi(x) = \{0, 4, 5\}$. Can the Theorem of Kakutani be used to assure that the correspondence has a fixed point? Justify.

2. **(3.5)** Consider the following excess demand functions in a Walrasian model with two goods 1 and 2. p_1 and p_2 are respectively the prices of good 1 and 2.

$$\begin{aligned} Z_1(p_1, p_2) &= p_1 - p_2^2 - ap_1p_2 \\ Z_2(p_1, p_2) &= 3p_1^2 + p_1p_2 - \frac{p_1^2}{p_2} \end{aligned}$$

- (a) Without computing the equilibrium prices, indicate the value of a which guarantees the existence of those prices and explain why.
(b) After answering the previous question, compute the equilibrium prices.

III

1. **(2.5)** Consider a continuous time version of a two-state Markov process $\dot{y} = My$, where the transition matrix is

$$M = \begin{pmatrix} -\pi_1 & \pi_1 \\ \pi_2 & -\pi_2 \end{pmatrix}$$

for $0 < \pi_1 < 1$ and $0 < \pi_2 < 1$

- (a) solve the differential equation;
(b) let $y(0) = (0, 1)$. Solve the initial value problem;
(c) draw the phase diagram associated to the initial value problem.

2. **(2.5)** Assume that a consumer has an endowment denoted by W_t at time $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. The horizon T is finite. The endowment evolves over time as $W_{t+1} = (1 + r)W_t - C_t$, where C_t is the amount of the endowment consumed at time t and $r > 0$ is a parameter. Assume that $W_0 = \phi > 0$ and that the consumer wants to have $W_T = \phi$. The consumer has a psychological discount factor $0 < \beta < 1$ and a static logarithmic utility function.

- (a) Transform the problem into a calculus of variations problem and determine the Euler-Lagrange equation.
(b) Solve the problem. Consider a continuous time version of a two-state Markov process $\dot{y} = My$, where the transition matrix is

$$M = \begin{pmatrix} -\pi_1 & \pi_1 \\ \pi_2 & -\pi_2 \end{pmatrix}$$

for $0 < \pi_1 < 1$ and $0 < \pi_2 < 1$

- (c) solve the differential equation;
 - (d) let $y(0) = (0, 1)$. Solve the initial value problem;
 - (e) draw the phase diagram associated to the initial value problem.
3. **(2.0)** Assume that a consumer has an endowment denoted by W_t at time $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. The horizon T is finite. The endowment evolves over time as $W_{t+1} = (1 + r)W_t - C_t$, where C_t is the amount of the endowment consumed at time t and $r > 0$ is a parameter. Assume that $W_0 = \phi > 0$ and that the consumer wants to have $W_T = \phi$. The consumer has a psychological discount factor $0 < \beta < 1$ and a static logarithmic utility function.
- (a) Transform the problem into a calculus of variations problem and determine the Euler-Lagrange equation.
 - (b) Solve the problem.



Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Mathematical Economics

Exam – 30/01/08 Duration: 3h00

NOTE: Answer each group in separate sheets. Justify clearly all answers

I

1. (2,0) Study the definiteness of matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. (2,0) Using the chain rule, compute $\frac{\partial z}{\partial t}$, at $t = 0$ for:

$$z(t, x, w) = \frac{5t^2 + 3x}{2w^2}, x(t) = t^2 + 1, w(t) = e^t + 1.$$

3. (3,0) Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & U = x^2 + (y - x)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x - 2y = b \end{aligned}$$

- (a) Solve the minimization problem.
- (b) Construct the function $U^*(b)$ consisting on the maximum value of U for each b .
- (c) Compute $U^{*'}(b)$ and relate this value to the Lagrange multiplier. Justify carefully your answer.

II

1. (3.5) Consider the following two sets A and B of points of R^2

$$\begin{aligned} A &= [0, 1] \times [a, 5] \\ B &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

(“ $\times$ ” means Cartesian product of the two intervals and a is unknown)

- (a) Find the set of values of a that assures the existence of a hyperplane separating A and B . Justify
- (b) Choose one value for a and find one of those hyperplanes for that value of a .

2. **(3.5)** Consider the following correspondence, where $\varphi(x)$ are sets corresponding to each x .

$$a) \quad -1 \leq x < 0 \quad \varphi(x) = \{(x+2)/3\}$$

$$b) \quad x = 0 \quad \varphi(x) = [-1, 3]$$

$$c) \quad 0 < x \leq 4 \quad \varphi(x) = \{(x-1)/3\}$$

Show that the theorem of Kakutani can be used to assure the existence of a fixed point. Find a fixed point.

III

1. **(2.0)** Consider the ode $\dot{y} = -1 + \lambda y$ where $\lambda > 0$.
 - (a) Solve the differential equation.
 - (b) Consider the terminal condition $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} y(t) = 0$. Solve the terminal value problem.
2. **(2.0)** Let $y_t \in \mathbb{R}^2$ and consider the planar difference equation $y_{t+1} = Ay_t + B$ for $A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$, where $B = (1, 0)$.
 - (a) Solve the difference equation;
 - (b) Assume that $y_{1,0} = 3/15$ and that $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{2t} = \bar{y}_{2t}$, where $\bar{y}_{2t}$ is the steady state level for y_{2t} . Determine the solution of the initial-terminal value problem.
3. **(2.0)** Assume that a consumer has an endowment $W(t)$ at time $t \in [0, T]$, where T is finite. He/she wants to consume it totally until time t , such that $W(T) = 0$. The endowment accumulates according to the equation $\dot{W} = C(t) - rW(t)$ where $r > 0$ and is constant. Initially $W(0) = \phi > 0$. The consumer has a psychological rate of time preference $\rho > 0$ and a static logarithmic utility function.
 - (a) Determine the first order conditions from the Pontryagin's maximum principle.
 - (b) Solve the problem.



Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Economia Matemática

Exame – 07/01/09 Duração: 2h30

NOTA: Responda a cada grupo em folhas separadas. Justifique claramente todas as respostas.

Grupo I (5 val)

1. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) (2.0 val.) Calcule a inversa da matriz B .
- (b) (3.0 val.) Proceda à diagonalização da matrix B . Calcule B^3 .

Grupo II (7 val)

1. (4.0 val) Considere a seguinte correspondência de $[0, 5]$ em $[0, 5]$:

$$0 \leq x < 2 \quad \varphi(x) = \{x + 0, 2; x + 0, 4\}$$

$$x = 2 \quad \varphi(x) = [a, b]$$

$$2 < x \leq 5 \quad \varphi(x) = \{x - 1\}$$

- (a) (2.0 val) Indique, **justificando** a resposta, dois valores possíveis para a e b que garantam que a correspondência é semicontínua superior em todos os pontos de $[0, 5]$.
- (b) (2.0 val) Nesse caso pode ser utilizado o teorema de Kakutani para provar a existência de um ponto fixo? **Justifique**.

NOTE BEM : O símbolo $\{u; v\}$ representa o conjunto de dois elementos, u e v e não o intervalo de extremidades u e v .

2. (3.0 val) Considere um espaço R^2 e os seguintes conjuntos A , B , C e D

$$A = [1, 3]$$

$$B = (0, 5)$$

$$C = \{(x, y) \text{ de } R^2 \text{ tais que } (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq r^2\}$$

$$D = A \times B$$

- (a) (1.5 val) Indique um valor de r que permita garantir que existe um hiperplano a separar C de D .

(b) (1.0 val) Indique as razões que lhe permitem justificar a resposta à questão anterior.

(c) (0.5 val) Apresente a equação de um hiperplano separador.

NOTE BEM: O símbolo " $\times$ " representa o produto cartesiano de conjuntos e (a, b) representa o intervalo aberto de extremidades a e b .

Grupo III (8 val.)

$\frac{d(p/d)}{p/d} = \frac{dp/p}{p} - \frac{dd/d}{d}$
1. (2.0 val) A taxa de rendimento de uma acção, é igual à taxa de variação da sua cotação, $\dot{p}/p$, mais o ratio entre o dividendo e a cotação, $d/p(t)$. Em equilíbrio, com ausência de oportunidades de arbitragem e previsão perfeita, a taxa de rendimento da acção deverá ser igual à taxa de juro do mercado, r , que se admite constante.

(a) Escreva e resolva a equação diferencial ordinária para a cotação da acção. Forneça uma ilustração geométrica.

(b) Excluem-se bolhas especulativas se se admitir que $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^{-rt} = 0$. Qual seria a expressão para a cotação, em função de $t \in [0, \infty)$, se aquela hipótese se verificar? Interprete os resultados obtidos.

2. (3.0 val) Considere a equação às diferenças planar $y_{t+1} = Ay_t + B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Resolva a equação às diferenças (sugestão: Considere separadamente os casos $b = 0$ e $b \neq 0$).

(b) Desenhe o diagrama de fases.

3. (3.0 val) Admita que um consumidor tem uma dotação, cuja quantidade no início do período $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ é designada por W_t , com T finito. A dotação evolui de acordo com a equação $W_{t+1} = (1+r)W_t - C_t$, em que C_t é a quantidade consumida ao longo do período t , e $r > 0$ é um parâmetro. Admita que $W_0 = \phi > 0$ e que o consumidor pretende ter a dotação final $W_T = \phi$. O consumidor quer determinar uma trajectória óptima para a dotação, usando uma função de utilidade intertemporalmente aditiva, em que a função de utilidade para o período t é $\ln(C_t)$, e há um factor de desconto psicológico igual a $\beta \in (0, 1)$.

(a) Exprima o problema como um problema de cálculo das variações, e escreva as condições de primeira ordem.

(b) Determine a solução do problema.

Economia Matemática

Exame – 27/01/09 Duração: 2h30

NOTA: Responda a cada grupo em folhas separadas. Justifique claramente todas as respostas.

Grupo I (5.0 valores)

1. (2.0 val.) Considere a função $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$. Suponha que x e y são função de t : $x(t) = \frac{1}{2}t^2$, $y(t) = \ln(t)$. Calcule a derivada $\frac{\partial f}{\partial t}$.
2. (3.0 val.) Determine se a função $f(x, y) = x^2y$ é côncava ou convexa no domínio $\{x > 0, y > 0\}$.

Grupo II (7.0 valores)

1. (4.0 val.) Considere o seguinte intervalo A de R , $A = [0, 1]$ e também a função real definida sobre A , $f(x) = ax/(x+1)$
 - (a) (3.0 val.) Determine o conjunto de todos os valores de a que permitem garantir, através da aplicação do teorema do ponto fixo de Brouwer, a existência de um ponto fixo de f em A
 - (b) (1.0 val.) Suponha agora que $A = [0, 0.5] \cup [0.7, 1]$ e que a toma o valor $a = 0.5$. Continuará a ser aplicável o teorema de Brouwer? Justifique.
2. (3.0 val) Sejam os seguintes conjuntos A e B de R^2

$$A = \{(x, y) : 2x + 3y \leq 1\}$$
$$B = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

Diga, justificando, se podemos usar o Teorema do Hiperplano Separador para provar a existência de um hiperplano a separar A de B .

Grupo III (8.0 valores)

1. (3.0 val.) Considere a equação diferencial ordinária planar $\dot{y} = Ay + B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determine a solução da equação diferencial.
- (b) Desenhe o diagrama de fases e discuta o resultado obtido.
- (c) Seja $y(0) = (0, 0)$. Resolva o problema de valor inicial.

2. (2.0 val.) Considere a equação às diferenças $y_{t+1} = -3/2y_t - 1/2$.
- (a) Determine a sua solução e caracterize-a.
 - (b) Seja $y_0 = 0$. Resolva o problema de valor inicial. Desenhe o diagrama das iterações (*iteration map*).
3. (2.0 val.) Admita que um consumidor tem um recurso, cuja quantidade no início do período $t \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ é designada por W_t . A dotação é consumida na quantidade C_t ao longo do período t . A dotação inicial é $W_0 = \phi > 0$. O consumidor quer determinar uma trajetória ótima para a dotação, que se admite assumir valores não negativos assintoticamente, usando um função de utilidade intertemporalmente aditiva, em que a função de utilidade para o período t é isoelástica, $\frac{1}{1-\sigma}(C_t)^{1-\sigma}$, com $\sigma > 0$ e um factor de desconto psicológico igual a $\beta \in (0, 1)$.
- (a) Exprima o problema como um problema de controle ótimo e escreva as condições de ótimo de primeira ordem segundo o princípio de Pontryagin's.
 - (b) Determine a solução do problema.

Exame da Época Normal 2009/2010
Economia Matemática
Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Duração: 2h30

Responda a cada grupo em folhas de ponto separadas. Não são permitidas calculadoras gráficas, nem telemóveis.

Bom Trabalho

Grupo I

1. (4 valores) Seja $f : R^n \rightarrow R$ dada por:

$$f(x_1, x_2) = \log(x_1^\alpha x_2^\alpha)$$

com $\alpha > 0$.

- (a) (1 valor) Como se define, sem recurso a diferenciabilidade, uma função côncava?
- (b) (3 valores) Mostre que a função f é côncava.
2. (3 valores) Determine o máximo e o mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ no círculo unitário, $x^2 + y^2 = 1$, usando o método de Lagrange. Resolva o mesmo problema usando o método de substituição. Obtem os mesmos resultados? Porquê, ou porque não?

Grupo II

1. (3,5 valores) Considere a seguinte correspondência φ definida em $S = [2, 10] \subset R$:

$$\begin{aligned} 2 &\leq x < 5 & \varphi(x) &= \{x + 2\} \\ x &= 5 & \varphi(x) &= [a, b] \cup [c, 8] \\ 5 &< x \leq 10 & \varphi(x) &= [x - 3, x - 1] \end{aligned}$$

- (a) (3 valores) Indique três valores, um para cada um dos números a, b e c, que permitam aplicar o teorema do ponto fixo de Kakutani. Justifique.
- (b) (0,5 valores) No caso anterior, calcule um ponto fixo.
2. (3,5 valores) Considere os seguintes conjuntos A e B de R^2 :

$$\begin{aligned} A &= [0, 2] \cup (a, 4] \times [1, 3] \\ B &= \{(x, y) \in R^2 : y \geq b - x\} \end{aligned}$$

(o símbolo “ $\times$ ” representa o produto cartesiano de conjuntos)

- (a) (3 valores) Indique o menor valor de a e um valor para b que permitam garantir que existe uma recta a separar os conjuntos A e B . Justifique.
- (b) (0,5 valores) No caso anterior, apresente a equação de uma dessas rectas.

Grupo III

1. (1 valor) Considere a equação $y_{t+1} = \alpha y_t - 1$, para $\alpha > 0$.
 - (a) (0,5 valores) Determine a solução da equação às diferenças para os diferentes valores de α .
 - (b) (0,5 valores) Admita a condição terminal $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha^{-t} y_t = 0$. Discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de valor terminal. Determine a solução do problema, caso exista.
2. (2 valores) Considere a equação planar

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1 + \alpha)k_t - \alpha h_t + c + (1 - \gamma)k_t \\ h_{t+1} &= -\beta k_t + (1 + \beta)h_t + c + (1 - \gamma)h_t \end{aligned}$$

em que $c > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.

- (a) (1 valor) Faça uma representação matricial e determine os valores próprios da matriz dos coeficientes de (k_t, h_t) .
 - (b) (1 valor) Obtenha o diagrama de bifurcação no espaço $(\gamma, \alpha + \beta)$, indicando os tipos de diagramas de fases que poderão existir.
3. (3 valores) Considere o problema de controle óptimo: $\max_{\{u\}} \sum_{t=0}^3 y_t - (2 - u_t)^2$ sujeito a $y_{t+1} = 1/2(y_t - u_t)$ e a $y_0 = 0$ e $y_4 = 45/2$.
 - (a) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem segundo o princípio de Pontriagin.
 - (b) (2 valores) Resolva o problema, ou seja, obtenha as sequências óptimas $\{y_t^*\}_{t=0}^4$ e $\{u_t^*\}_{t=0}^4$.

Exame da Época de Recurso 2009/2010
Economia Matemática
Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Duração: 2h30

Responda a cada grupo em folhas de ponto separadas. Exames que não respeitam esta condição **não serão corrigidos**. Não são permitidas calculadoras gráficas, nem telemóveis.

Bom Trabalho!

Grupo I

1. (4 valores) Considere o problema de maximização:

$$\max_{x,y} f(x,y) = x^3 + y^3 \quad \text{s.a.} \quad x + y = 1$$

- (a) (2 valores) Mostre que o problema não tem solução e discuta este resultado à luz do Teorema de Weierstrass.
- (b) (2 valores) Mostre que, se o Método de Lagrange fosse utilizado, os pontos críticos da Lagrangeana teriam uma solução única. Determine se este ponto seria um máximo ou um mínimo global.
2. (3 valores) Considere o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} & (x-1)^2 + (y-2)^2, \quad \text{s.a.} \\ 4 & \geq 2y + x, \\ 20 & \geq 3y + 10x, \\ x, y & \geq 0 \end{aligned}$$

Verifique que no óptimo existe apenas uma restrição activa, nomeadamente a primeira.

Grupo II

1. (3,5 valores) Considere uma economia competitiva em que se trocam dois bens, 1 e 2 e para os quais se conhecem as respectivas funções de procura (D_i) e oferta (S_i):

Bem 1:

$$\begin{aligned}D_1 &= p_2 - p_1^2 p_2 \\S_1 &= \alpha p_1 p_2^2 - p_2^2 + p_1 p_2\end{aligned}$$

Bem 2:

$$\begin{aligned}D_2 &= p_1^3 - p_1 p_2 - p_1 \\S_2 &= 3p_1^2 p_2 - p_1^2\end{aligned}$$

- (a) (2 valores). Determine o valor de α que permite calcular o vector de preços de equilíbrio.
- (b) (1,5 valores) Verifique que, para esse valor, $p_1 = 0,842$ e $p_2 = 0,158$ são, aproximadamente, preços de equilíbrio e calcule o valor do erro de aproximação para cada um dos mercados.
2. (3,5 valores) Considere a seguinte correspondência φ definida no intervalo $[0,5 \ 2]$ de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}0.5 &\leq x < 1, \varphi(x) = \{1, 5x\} \\x &= 1, \varphi(1) = [a \ b] \\1 &< x \leq 2, \varphi(x) = [x - 0.5 \ x - 0.4]\end{aligned}$$

- (a) (3 valores) Indique um valor para a e outro para b que permitam aplicar o Teorema de Kakutani para provar a existência de um ponto fixo da correspondência.
- (b) (0,5 valores) Com esses valores, calcule um ponto fixo.

Grupo III

1. (1 valor) Considere a equação $y_{t+1} = -1/2y_t + 3/2$.
 - (a) (0,5 valor) Determine a solução da equação às diferenças e caracterize-a.
 - (b) (0,5 valor) Seja $y_0 = -1$. Resolva o problema de valor inicial. Desenhe o diagrama das iterações (*iteration map*).
2. (2 valores) Considere a equação às diferenças planar $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t$, em que
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 - (a) (1,5 valores) Determine a solução da equação às diferenças. Caracterize-a qualitativamente.
 - (b) (0,5 valor) Suponha que $\mathbf{y}_0 = (1, -1)^\top$. Obtenha a solução do problema de valor inicial.
3. (3 valores) Considere o seguinte problema de investimento óptimo para uma empresa: determinação da sequência de investimento, $\{I_t\}_{t=0}^\infty$, que maximiza o funcional objectivo $\sum_{t=0}^\infty (1+r)^{-t} \pi_t$, onde $r > 0$ é taxa de juro de mercado. O *cash flow* no período t é denotado por $\pi_t = AK_t - I_t(1 + \xi I_t)$, em que K_t representa o stock de capital, e $A > 0$ e $\xi > 0$ são parâmetros de produtividade e de custo de investimento, respectivamente. O problema tem como restrições, a equação de acumulação do stock de capital $K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t$, em que $\delta \in [0, 1)$ é a taxa de depreciação do capital, e o stock de capital inicial é dado por $K_0 = \phi > 0$. Suponha que $A > r + \delta$.
 - (a) (1 valor) Exprima o problema como um problema de cálculo de variações e determine as condições de primeira ordem de óptimo.
 - (b) (2 valores) Determine a solução do problema como uma função explícita para K_t . Justifique e forneça uma intuição económica para a solução que obteve.



Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Economia Matemática

Ano Lectivo de 2010/2011 – Exame da Época Normal

Duração: 2h30

Antes de iniciar o teste, tenha em atenção os seguintes aspectos:

- Não é permitida a consulta de qualquer material de apoio, nem de calculadoras gráficas;
- Desligue e arrume o telemóvel;
- Responda a cada um dos 3 **grupos** de questões em folhas separadas e correctamente identificadas;
- Apresente todos os cálculos que efectuar e não apenas os resultados finais;
- Justifique todas as suas respostas

Grupo I

1. (6,5 valores) Seja $W(x, y, z)$ a função que representa a relação entre a produção de x , y e z e o bem estar social. O objectivo deste problema é obter o bem estar social máximo dadas as restrições existentes na economia para a produção de x , y e z . Nomeadamente:

$$\max_{x,y,z} W(x, y, z) = a \log x + b \log y + c \log z, \text{ s.a.}$$

$$2x + y + 3z \leq 600$$

$$x + 2y + z \leq 550$$

$$1 \leq x, 1 \leq y \text{ e } 1 \leq z$$

Sendo os parâmetros $a, b, c > 0$.

- (a) (0,5 valor) Defina as funções $h_i(x, y, z), i = 1, \dots, 5$ que representam as restrições deste problema para que o Teorema de Kuhn-Tucker possa ser utilizado.
- (b) (2 valores) Seja o conjunto D definido por

$$D = \{(x, y, z) : h_i(x, y, z) \geq 0, i = 1, \dots, 5\}.$$

- i. O conjunto D é compacto? Justifique.
- ii. A função W tem um máximo no conjunto D ? E um mínimo? Justifique.

- (c) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem do teorema de Kuhn-Tucker que têm de ser resolvidas para que se obtenha um ponto de máximo de W no conjunto definido pelas restrições.
- (d) (1 valor) Escreva as condições de complementariedade do Teorema de Kuhn-Tucker deste problema.
- (e) (2 valores) Suponha que o ponto óptimo do problema ocorre quando $(x, y, z) = (50, 200, 100)$. Mostre que o teorema de Kuhn-Tucker se pode aplicar neste caso.

Grupo II

1. (2,5 valores) Considere a seguinte economia de troca em que existem só dois bens: 1 e 2. As funções de oferta (S) e procura (D) de cada bem são, respectivamente:

Para o bem 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4p_1p_2^2 - p_1g(p_2) \\ D_1 &= 4p_1p_2^2 - 3p_1^2p_2 \end{aligned}$$

Para o bem 2:

$$\begin{aligned} S_2 &= -p_1p_2 + p_1^2p_2 \\ D_2 &= -p_1p_2 + 3p_1^3 \end{aligned}$$

Encontre a expressão analítica da função $g(p_2)$ que permite garantir a existência de um vector de preços de equilíbrio de Walras e calcule esse vector.

2. (4 valores) Seja a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow 2^{[0, 1]} \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{(2-x)}{2}, & \text{Para } 0 \leq x < 0,5 \\ [a, b], & \text{Para } x = 0,5 \\ \frac{1}{(0,7+x)}, & \text{Para } 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Indique o maior valor de a e o menor valor de b que permitem garantir a existência de um ponto fixo através do teorema de Kakutani. Determine esse ponto e prove que, neste exercício, ele é único.

Grupo III

1. Considere uma economia descrita pelas seguintes equações: (1) uma função de produção $Y_t = AK_t$, em que Y_t é produção, K_t é o stock de capital e A é um parâmetro de produtividade; (2) uma função poupança Keynesiana, $S_t = sY_t$, em que $0 < s < 1$ é a propensão marginal a poupar; (3) uma função investimento, $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$ em que $0 < \delta < 1$ é a taxa de depreciação do capital; e (4) a equação de equilíbrio $S_t = I_t$. Admita que o nível inicial do stock de capital, $K_0 > 0$, é conhecido.

- (a) Obtenha uma equação às diferenças escalar em K_t .
 - (b) Resolva o problema de valor inicial associado.
 - (c) Caracterize a solução. Faça uma representação geométrica.
2. Considere a equação às diferenças planar $y_{t+1} = Ay_t$ com
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}, 0 < a < 1$$
- (a) Determine a solução geral da equação planar
 - (b) Desenhe o diagrama de fases. Comente os resultados obtidos.
3. Considere o problema de cálculo das variações $\max_y \sum_{t=0}^T -(y_{t+1} - 2y_t)^2$ com $y_0 = 1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = 0$.
- (a) Obtenha a condição de Euler-Lagrange;
 - (b) Obtenha a solução do problema.

itbpF2.1871in0.6045in0inFigure
Economia Matemática
Ano Lectivo de 2010/2011 – Exame da Época de Recurso
Duração: 2h30

Antes de iniciar o teste, tenha em atenção os seguintes aspectos:

- Não é permitida a consulta de qualquer material de apoio, nem de calculadoras gráficas;
- Desligue e arrume o telemóvel;
- Responda a cada um dos 3 **grupos** de questões em folhas separadas e correctamente identificadas;
- Apresente todos os cálculos que efectuar e não apenas os resultados finais;
- Justifique todas as suas respostas

Grupo I

1. (6,5 valores) Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

definida em $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$.

- (a) (1,5 valor) Determine o(s) ponto(s) críticos da função no interior do domínio definido. (dica: no óptimo, teremos $x^* = y^*$)
- (b) (0,5 valor) Determine o(s) ponto(s) crítico(s) da função $g(x) = f(x, 0)$, $x \geq 0$, i.e. ao longo da fronteira $y = 0$. Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de $g(x)$.
- (c) (0,5 valor) Determine e classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de $h(y) = f(0, y)$, $y \geq 0$, i.e. ao longo da fronteira $x = 0$. Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de $h(y)$.
- (d) (1,5 valores) Compare as soluções obtidas em **b**, **c** e **d** em termos do valor da função. Analise ainda o ponto $f(0, 0)$. Explique a necessidade desta análise.

(e) (3,0 valores) Considere agora o seguinte problema:

$$\max_{x,y} f(x,y) \text{ s.a. } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq \frac{3}{4}$$

- i. (1,0 valor) Apresente as condições de primeira ordem e de complementariedade do teorema de Kuhn-Tucker aplicado a este problema.
- ii. (1,5 valor) Verifique se existe uma solução em que apenas a restrição $x + y \leq \frac{3}{4}$ é activa.

Grupo II

1. (2,5 valores) Considere a seguinte economia de troca em que existem só dois bens: 1 e 2. As funções de oferta (S) e procura (D) de cada bem são, respectivamente:

Para o bem 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= f(p_1, p_2) + p_1 g(p_1, p_2) \\ D_1 &= f(p_1, p_2) + 2p_1 p_2 \end{aligned}$$

Para o bem 2:

$$\begin{aligned} S_2 &= h(p_1, p_2) + 2p_1^2 \\ D_2 &= h(p_1, p_2) + p_1 \end{aligned}$$

Encontre as condições que permitem garantir a existência de um vector de preços de equilíbrio de Walras e calcule esse vector.

2. (4 valores) Seja um espaço $\mathbb{R}^2$ e os seguintes conjuntos do espaço:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ B &= [0, 5] \times [0, 5] \end{aligned}$$

em que $\times$ é o símbolo de produto cartesiano de conjuntos, e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k - y \leq x\}.$$

Considere ainda o conjunto

$$D = A \cap B$$

Indique, caso exista, um valor de k , que seja menor que 2 e que permita garantir a existência de um hiperplano a separar D e C . Justifique detalhadamente.

Sugestão: represente graficamente os conjuntos envolvidos.

Grupo III

1. (1,5 valores) Considere a equação $y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + 2$.
 - (a) (0,5 valor) Determine a solução da equação às diferenças.
 - (b) (0,5 valor) Desenhe o gráfico de iterações.
 - (c) (0,5 valor) Admita a condição terminal $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_t = \bar{y}$ em que $\bar{y}$ é o equilíbrio estacionário. Discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de valor terminal. Determine a solução do problema, caso exista.
2. (2 valores) Considere a equação às diferenças planar $y_{t+1} = Ay_t$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- (a) (1 valor) Determine a solução da equação às diferenças.
 - (b) (1 valor) Desenhe o diagrama de fases e caracterize o comportamento dinâmico do modelo.
3. (3,5 valores) Seja o problema do consumidor com a função objectivo

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \text{ sujeito a,}$$

$$W_{t+1} = (1-\delta)W_t - C_t, \quad W_0 = \phi > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} W_t \geq 0$$

Suponha que $\sigma > 0$, $0 < \beta < 1$ e $0 < \delta < 1$ e que $\beta^{\frac{1}{\sigma}} < (1-\delta)^{1-1/\sigma}$.

- (a) (1 valor) Escreva as condições de primeira ordem segundo o princípio de Pontryagin. Represente o sistema canónico como uma equação às diferenças planar em $(C; W)$.
- (b) (2,5 valores) Resolva o problema, ou seja, obtenha as sequências óptimas $\{W_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ e $\{C_t^*\}_{t=0}^{\infty}$. Comente os resultados obtidos.

Economia Matemática

1º Semestre 2011/2012

EXAME DE ÉPOCA NORMAL

3 Janeiro 2012

Duração máxima: 2 horas

Resolva cada parte do exame numa folha separada

PARTE I

- (1) Suponha uma economia em que se trocam dois bens (bem 1 e bem 2) com, respectivamente, as seguintes funções de procura e oferta dependentes dos preços:

Bem 1

$$D_1 = a(p_1/p_2)^{1/2} + p_1^2 \quad S_1 = -p_1 p_2^2 + p_1^2$$

Bem 2

$$D_2 = b p_1 (p_1/p_2)^{1/2} + p_2 \quad S_2 = p_2 + p_1^2 p_2.$$

Sabendo que $a - b = 0,8$, calcule os valores de a e de b que permitem, a priori, garantir que existe um vector de preços de equilíbrio no sentido de Walras. (2 valores)

- (2) Considere um mercado onde existem n agentes ligados em rede e em que cada agente comunica com todos os outros, seja directamente seja indirectamente (isto é, através de outro agente). Se cada agente comunica com outro, esse outro comunica com o primeiro. Se um agente i comunica directamente com um outro agente j diz-se que deu um passo na comunicação. Por convenção, o número de passos de i para i é 0.

- (a) Prove que a função $d(i, j) = N$, sendo N o número mínimo de passos que o agente i dá para comunicar com o agente j , é uma distância definida no conjunto de todos os pares (i, j) para todos os agentes i e j . (2 valores)
- (b) Se a rede é tal que cada agente só comunica directamente com cinco outros agentes, diga quais são os elementos de cada esfera aberta de raio 2 e centro em cada agente i . (1 valor)

PARTE II

- (1) Considere o seguinte problema:

$$\max f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$\text{sujeito a } x + 2y \leq 11$$

$$x, y \geq 0$$

- (a) Enuncie o teorema de Weierstrass e explique se esse teorema pode ser usado na resolução do problema. (1 valor)
- (b) Resolva o problema utilizando o teorema de Kuhn-Tucker. Explique claramente o seu raciocínio e todos os passos que efectuar. (4 valores)

PARTE III

- (1) Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = x - x^3.$$

- (a) Encontre todos os seus pontos de equilíbrio. ($\frac{1}{2}$ valor)
- (b) Determine se cada ponto de equilíbrio é estável, assintoticamente estável ou instável. (1 valor)
- (c) Desenhe o retrato de fases da equação. ($\frac{1}{2}$ valor)

- (2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule a forma normal de Jordan J de A . (1 valor)
- (b) Determine a matriz exponencial e^{tJ} . ($\frac{1}{2}$ valor)
- (c) Desenhe o retrato de fases da equação linear $\dot{y} = Jy$. (1 valor)
- (d) Encontre os pontos de equilíbrio de $\dot{x} = Ax$, e determine a sua estabilidade. ($\frac{1}{2}$ valor)

PARTE IV

- (1) Considere o problema de um agente cujo objectivo é maximizar a utilidade total descontada obtida a partir do seu consumo durante o intervalo de tempo $[0, T]$. Seja $K(t)$ o capital acumulado por esse agente no instante $t \in [0, T]$ e $C(t)$ o seu consumo nesse mesmo instante de tempo. Suponha que:

- o horizonte temporal $T > 0$ é finito,
- o agente tem um capital acumulado inicial $K(0) = K_0$,
- o capital acumulado por esse agente satisfaz a equação diferencial

$$\dot{K}(t) = K(t) - C(t) ,$$

- as preferências do agente relativamente ao consumo são descritas pelo funcional

$$J[C(t)] = \int_0^T 2 \exp(-t) \sqrt{C(t)} dt .$$

Justifique convenientemente a sua resposta às seguintes questões.

- (a) Represente o problema descrito acima como um problema de cálculo de variações. (1 valor)
- (b) Determine uma condição necessária para a existência de uma solução C^2 para o problema da alínea (a). (2 valores)
- (c) Assuma que existe uma solução C^2 para a condição obtida na alínea (b). Mostre que tal solução é um maximizante do problema de cálculo de variações da alínea (a). (2 valores)

Economia Matemática

1º Semestre 2011/2012

EXAME DE ÉPOCA DE RECURSO

24 Janeiro 2012

Duração máxima: 2 horas

Resolva cada parte do exame numa folha separada

PARTE I

- (1) Considere a seguinte correspondência definida no intervalo $[0, 4]$:

$$0 \leq x < 1 \quad \varphi(x) = \{2x^2\}$$

$$x = 1 \quad \varphi(1) = [0, 5m) \cup [1, 2]$$

$$1 < x < 4 \quad \varphi(x) = \{\sqrt{x}\}$$

$$x = 4 \quad \varphi(4) = [1, 3]$$

- (a) Determine o conjunto de todos os valores de m que permitem que se verifiquem as condições do teorema do ponto fixo de Kakutani e mostre que estão também reunidas todas as outras condições. (2 valores)
- (b) Escolha um dos valores de m e calcule todos os pontos fixos da correspondência. (1 valor)

- (2) Considere uma economia em que se produzem n bens.

Os vectores X dos bens procurados satisfazem a condição $X \geq A$ em que A é um vector não negativo. Os vectores Y dos bens produzidos satisfazem a condição $0 \leq Y \leq B$ em que 0 é o vector nulo, B é um vector não negativo e $A \geq B$. Existe pelo menos uma componente i de B , b_i tal que $b_i < a_i$.

Mostre que existe um vector de preços não negativo tal que, com esses preços, o valor total das quantidades produzidas nunca é superior ao valor total das quantidades procuradas, quaisquer que sejam as quantidades produzidas e procuradas. (2 valores)

(*Sugestão:* para demonstrar que o vector de preços é não negativo proceda por absurdo, supondo que o preço de um dos bens é negativo).

PARTE II

- (1) Utilizando o teorema de Kuhn-Tucker, resolva o problema seguinte. Explícite claramente o seu raciocínio e todos os passos que efectuar.

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &= x + y \\ \text{sujeito a } 2x + y &\leq 8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

(5 valores)

PARTE III

- (1) Considere a equação às diferenças:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

- (a) Encontre todos seus pontos fixos. ($\frac{1}{2}$ valor)
- (b) Determine se cada ponto fixo é estável, asymptoticamente estável ou instável. (1 valor)
- (c) Trace os *stair-step diagrams* com quatro iterações e condições iniciais: $x_0 = -1$ e $x_0 = 0, 25$. ($\frac{1}{2}$ valor)

- (2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule a forma normal de Jordan J de A . (1 valor)
- (b) Determine a matriz exponencial e^{tJ} . ($\frac{1}{2}$ valor)
- (c) Desenhe o retrato de fases da equação linear $\dot{y} = Jy$. (1 valor)
- (d) Encontre os pontos de equilíbrio de $\dot{x} = Ax$, e determine a sua estabilidade. ($\frac{1}{2}$ valor)

PARTE IV

- (1) Considere o problema de um agente cujo objectivo é maximizar a utilidade total descontada obtida a partir do seu consumo durante o intervalo de tempo $[0, T]$. Seja $K(t)$ o capital acumulado por esse agente no instante $t \in [0, T]$ e $C(t)$ o seu consumo nesse mesmo instante de tempo. Suponha que:

- o horizonte temporal $T > 0$ é finito,
- o agente tem um capital acumulado inicial $K(0) = K_0$ e quer atingir o horizonte temporal T com um capital acumulado nulo,
- o capital acumulado pelo agente satisfaz a equação diferencial

$$\dot{K}(t) = K(t) - C(t) ,$$

- as preferências do agente relativamente ao consumo são descritas pelo funcional

$$J[C(t)] = \int_0^T 2 \exp(-t) \sqrt{C(t)} \, dt .$$

Justifique convenientemente a sua resposta às seguintes questões.

- (a) Represente o problema descrito acima como um problema de controlo óptimo. (1 valor)
- (b) Utilize o princípio do máximo de Pontryagin para caracterizar o par óptimo para o problema da alínea (a). (2 valores)
- (c) Utilize a condição do máximo obtida na alínea anterior para determinar o consumo óptimo em função da variável de estado e da variável adjunta. (1 valor)
- (d) Assuma que existe uma solução para o sistema Hamiltoniano alargado obtido na alínea (b). Mostre que tal solução determina um maximizante para o problema de controlo óptimo da alínea (a). (1 valor)