

Matemática I - 2008/2009

Ficha de exercícios nº 8

Cálculo Integral

Exercício 1 *Determine uma primitiva das seguintes funções nos respectivos domínios:*

a) $x^5 + 5x^2$

b) e^{4x}

c) e^{3x+3}

d) $2x^3 e^{x^4}$

e) $\sin(3x)$

f) $\cos(2x - 3)$

g) $\frac{5}{x}$

h) $\frac{x}{x^2-6}$

i) $\frac{e^x}{e^x+10}$

j) $\frac{x^2}{1+x^3}$

k) $\frac{5}{1+x^2}$

l) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

m) $\frac{3x}{2+x^4}$

n) $\sin x \cos^2 x$

o) $\sin x \cos x$

p) 5^{4x-1}

q) $\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}$

o) $-\frac{x}{\sqrt{2-9x^4}}$

r) $x\sqrt{2x^2 + 3}$

s) $3x^3\sqrt[3]{x^4 - 1}$

t) $2x^2\sqrt[4]{x^3 + 1}$

u) $\frac{1}{x \ln x}$

v) $\frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$

w) $\frac{3}{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

x) $\frac{2}{\cos^2 x}$

y) $\sin^4 x \cos x$

z) $(2 + \sqrt{x})^2$

a') $\tan x$

b') $\frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$

c') $\frac{1}{x+x \ln^2 x}$

Exercício 2 Determine a primitiva da função $f(x) = 2x$:

a) que, para $x = -1$, toma o valor 4.

b) que passa pelo ponto $(0, -2)$.

Interprete geometricamente.

Exercício 3 Determine uma primitiva das seguintes funções racionais nos respectivos domínios:

a) $\frac{x+3}{1+x^2}$

b) $\frac{6}{x^2+4}$

c) $\frac{1}{9-x^2}$

d) $\frac{1}{x^2-2x}$

e) $\frac{x^5}{x^2-1}$

f) $\frac{3x-7}{x^2+9}$

g) $\frac{x^2+1}{12+3x^2}$

Exercício 4 *Determine uma primitiva das seguintes funções, nos respectivos domínios:*

a) $x^2 e^x$

b) $(x^2 + x)e^x$

c) $x\sqrt{x+1}$

d) $x\sqrt[3]{x-3}$

e) $x^3\sqrt{1+x^2}$

f) $2x \cos x$

g) $\sin^2 x$

h) $\ln(2x-1)$

i) $\ln(x^2+1)$

j) $x^2 \ln x$

k) $\arctan x$

l) $\ln^2 x$

m) $e^x \cos x$

Exercício 5 *Determine, por substituição, uma primitiva das seguintes funções:*

a) $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$, com $x = t^2$ ($t \geq 0$)

b) $\sqrt{1-x^2}$, com $x = \sin t$

c) $\frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$, com $x = t^3$

d) $\frac{e^{\frac{x}{4}}}{1+e^{\frac{x}{10}}}$, com $x = 20 \ln t$ ($t > 0$)

e) $\sqrt{3-x^2}$, com $x = \sqrt{3} \sin t$

f) $\frac{\cos x}{\sin^6 x}$, com $x = \arcsin t$

Exercício 6 Determine a função f , duas vezes diferenciável em \mathbb{R} , que verifica as seguintes condições:

$$f''(x) = 2 \cos x + xe^x, \quad f'(0) = 2, \quad f(0) = 1$$

Exercício 7 Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_1^4 (3x^2 + 5) dx$

b) $\int_1^4 2x(x-1) dx$

c) $\int_{-1}^1 (x^2 + x + 1) dx$

d) $\int_{-3}^4 |x-2| dx$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

f) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx$

g) $\int_1^e x^4 \ln x dx$

h) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx$

i) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx$

j) $\int_1^3 xe^x dx$

k) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

l) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

$$\text{m) } \int_{-1}^2 f(x)dx, \text{ com } f(x) = \begin{cases} 1+2x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ e^x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Exercício 8 Calcule, em função de x , os integrais:

$$\text{a) } \int_0^x t dt$$

$$\text{b) } \int_x^{x+1} (3 \sin t + 2t^5) dt$$

Exercício 9 Estude a convergência dos integrais impróprios e calcule-os quando tal for possível:

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$\text{b) } \int_0^{+\infty} \cos x dx$$

$$\text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$\text{d) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx$$

$$\text{e) } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\text{f) } \int_{-2}^{+\infty} 3^x dx$$

$$\text{g) } \int_0^3 \frac{1}{x-3} dx$$

$$\text{h) } \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\text{i) } \int_0^1 x \ln x dx$$

Exercício 10 Considere o conjunto

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq e^{3x}, y \leq 1 - x\}.$$

- Represente graficamente a região plana definida pelo conjunto U .
- Calcule a área da região plana definida pelo conjunto U .

Exercício 11 Calcule a área dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5, y \geq -5x + 5, y \geq \ln x\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x^2 + 2\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq e^x, x \leq 1\}$

Exercício 12 Calcule a área da parte do plano limitada pelas linhas:

- $y = \ln x, x = 0, y = \ln 3, y = \ln 5$
- $y = e^x, y = -x^2, x = -1, x = 1$

Exercício 13 Calcule a área compreendida entre o gráfico da função $f(x) = e^{ax} - 1$, com $a > 0$, o eixo das abscissas e as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$.

Exercício 14 Sabendo que, $f''(x) = e^x(e^x - 1)^{-2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = -1$, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, determine a expressão de $f(x)$.

Exercício 15 Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:

- $F(x) = \int_1^x \ln t dt$
- $H(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$

Exercício 16 Sem utilizar a primitivação, calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(t^2+1) dt}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t dt}{x^2}$

Exercício 17 Considere a função $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{b+x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, $b > 0$.

a) Determine os valores de a e de b para os quais a função f é contínua em \mathbb{R} .

b) Faça $a = b = 1$ e considere a função definida por $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$.

i) Calcule $F(1)$.

ii) Mostre que a função F admite inversa no intervalo $(0, +\infty)$.

Exercício 18 Seja a função $f(x) = \int_1^{x^2+1} \left(\frac{1+t}{t}\right) dt$.

a) Calcule $f(-1)$.

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto $x = -1$.

Exercício 19 Considere a função com domínio D_f :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

a) Para que valores de $x \in D_f$ a função f é diferenciável? Escreva a expressão da função derivada $f'(x)$.

b) Determine $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, definida em $[-1, \infty)$.

Exercício 20 Determine uma primitiva das seguintes funções nos respectivos domínios:

a) $x\sqrt[3]{1+x^2}$

b) $2x\sqrt[3]{x^2+3}$

c) $e^x\sqrt[4]{1+e^x}$

d) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

e) $\frac{3x}{5+x^2}$

f) $x \sin x$

g) $x\sqrt{x^2+9}$

h) $x^4 \ln x$

i) $\frac{x}{2x^2+5} + \cos(2x)$

j) $\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$

k) $-\frac{3}{2x^2} + \frac{5}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

l) $\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$

m) $\frac{\sin x}{1+2\cos x} + \frac{1}{\sin^2 x}$

n) $(x^2+x)e^x$

o) $(\cos^2 x + 2\cos x)\sin x$

p) $\frac{kx}{a+bx}, k \neq 0, ab \neq 0$

q) $a\sin^3 x + x, a \neq 0$

r) $x^3\sqrt{1+x^2}$

s) $\frac{\ln|x|}{x}$

t) $\frac{1}{2x(x-1)}$

u) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$

$$v) \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$w) e^{2x} \cos 3x$$

$$x) e^{3x} \cos e^{3x}$$

$$y) \frac{1}{x} \ln^2 x$$

$$a') \arcsin x + \frac{x}{1+x^4}$$

$$b') 3^{2x+2}$$

$$c') \frac{1}{1-x^2}$$

$$d') \sqrt{e^x} + \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$e') (x^2 + 1) \sin 2x$$

$$f') e^{2 \cos 3x} \sin 3x$$

$$g') \cos^3 x \sin x$$

$$h') (x + 1)e^{(x+1)^2}$$

$$i') \frac{x^3}{1+x^8} + \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$$