

Primeira Parte (13,5 valores)

As 9 perguntas são de escolha múltipla. Preencha a **folha de respostas**, assinalando com uma cruz a **versão A** e indicando uma só resposta. Cada resposta correcta vale **1,5**. As respostas erradas são penalizadas.

1. Seja a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2y + x = x^2 - 3y$. Indique o valor correcto da elasticidade de y em relação a x no ponto $\left(3, \frac{1}{2}\right)$:

- a) $\text{El}_x y = \frac{3}{2}$ b) $\text{El}_x y = \frac{1}{6}$ c) $\text{El}_x y = 1$ d) $\text{El}_x y = \frac{1}{2}$

2. A inequação $\ln(1 + e^x) > 0$ admite como conjunto de soluções:

- a) $(-\infty, 0)$ b) $(-\infty, +\infty)$ c) $(0, +\infty)$ d) $[0, 1)$

3. Considere a função $f(x) = x^{4x}$, com $x > 0$. A equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é dada por:

- a) $y = 4 \ln x - 3$ b) $y = x^{4x} \ln x$ c) $y = 4 \ln x + 4$ d) $y = 4x - 3$

4. Seja a função $g(x) = f(\arctan(x))$, com f diferenciável em \mathbb{R} . Sabendo que $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$ indique o valor de $g'(1)$:

- a) 1 b) $\frac{\pi}{8}$ c) $-\pi$ d) $\frac{1}{2}$

5. O integral $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx$ é igual a:

- a) 0 b) 2 c) ∞ d) -2

6. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

O determinante de A é nulo para:

- a) qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha = -1$ d) $\alpha = 1$

7. Seja a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{e^x - 1}, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a resposta correcta:

- a) f é diferenciável e é contínua em $x = 1$
b) f é diferenciável e não é contínua em $x = 1$
c) f não é diferenciável e é contínua em $x = 1$
d) f não é diferenciável e não é contínua em $x = 1$

8. Considere a função $f(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ definida em \mathbb{R} . Indique a resposta correcta:

- a) f é côncava em $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ b) f é convexa em $(-\infty, +\infty)$
c) f é côncava em $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ d) f é convexa em $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

9. Seja $Ax = b$ um sistema com 4 equações e 5 incógnitas. Sabendo que o sistema tem dois graus de liberdade, indique a característica da matriz A :

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 1

Segunda Parte (6,5 valores)

Os cálculos que tiver de efectuar para responder às 3 perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificados.

Cotações: 1. a) **2**; 1. b) **1**; 2. **2**; 3. **1,5**.

1. Considere o sistema de equações lineares:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ 3x + y = 4 \\ 7x + 5y + z = \beta \end{cases}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

a) Classifique o sistema $Ax = b$ em função dos valores de α e β .

b) Indique justificando os valores de α para os quais a matriz A é invertível.

2. Calcule a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ definida no intervalo $[0, 3]$ e pelas rectas de equações $y = 2x - 3$ e $y = -x + 3$.

3. Aplique a fórmula de Taylor, em torno de 0, à função $f(x) = \ln(1+x)$ para provar que: $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.