Matemática I - 2009/2010

Ficha de exercícios

Semana 2: Capítulo 2 - Matrizes

1) Exercícios do Livro, *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter, Essential Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, third edition, 2008:*

Secção 15.2: Exercícios 1 a 4;
Secção 15.3: Exercícios 1, 3 e 5;
Secção 15.4: Exercícios 1, 4 a 7;
Secção 15.5: Exercícios 1, 3, 4 e 7.

2) Exercícios adicionais:

Ex. 1. Considere uma matriz real A de tipo $(m \times n)$. Mostre que se $n = 1$, então $A'A = 0 \Rightarrow A = \mathbf{0}$.

Ex. 2. Considere as matrizes seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabendo que X é uma matriz simétrica, resolva a equação matricial:
$XA - (B'X)' = kI$, com $k \in \mathbb{R}$.

Ex. 3. Sejam A e B matrizes permutáveis $(AB = BA)$ e C uma matriz, tal que $C = 3A^2 - 5A - I$, onde I designa a matriz identidade. Mostre que as matrizes C e B são permutáveis.

Ex. 4. Considere as matrizes quadradas A, B e C tais que $A = B + kC$, com k real. Sabendo que B e C são matrizes idempotentes $(B^2 = B$ e $C^2 = C)$ e que verificam $BC = CB = \mathbf{0}$, prove que $A^n = B + k^n C$.

Ex. 5. Determine a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 6. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & -2 \end{pmatrix}, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Mostre que a característica de A é independente do valor de k.

Ex. 7. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Indique a proposição verdadeira:

a) A característica de A é igual a 3.

b) As duas colunas de A são linearmente dependentes.

c) As duas colunas de A são linearmente independentes.

d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.