Matemática I - 2009/2010

Ficha de exercícios

Semanas 3/4: Sistemas de Equações Lineares (I)

1) Exercícios do Livro, *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter, Essential Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, third edition, 2008:*

Secção 15.1: Exercícios 1, 3;
Secção 15.6: Exercícios 1 a 3;

2) Exercícios adicionais:

Ex. 1. Determine os reais x, y e z tais que se verifique a seguinte igualdade:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ex. 2. Discuta a existência de soluções para os sistemas que se seguem determinando, sempre que possível, o número de graus de liberdade e as soluções.

a) $\begin{cases} -2x - 3y + z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z + w = 1 \\ 2x + y - z + 3w = 3 \\ x + 5y - 8z + w = 1 \\ 4x + 5y - 7z + 7w = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 3y + 2z + 4w = 0 \\ 2x + y - w = 0 \end{cases}$

Ex. 3. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Um sistema de equações lineares com igual número de equações e de incógnitas tem uma única solução.

b) Um sistema de equações lineares com igual número de equações e de incógnitas tem pelo menos uma solução.

c) Um sistema de equações lineares com mais equações do que incógnitas pode ter uma infinidade de soluções

d) Um sistema de equações lineares com menos equações do que incógnitas pode não ter solução.

Ex. 4. Classifique os sistemas em função dos valores dos parâmetros a e b.

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x-y-z=a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x-2y+az=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+az=0 \\ x+by=0 \\ by+az=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=a \\ 2x+bz=2 \end{cases}$

Ex. 5. Seja $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ um sistema com 4 equações e 5 incógnitas. sabendo que o sistema tem dois graus de liberdade, indique a característica da matriz do sistema A:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 1

Ex. 6. Considere

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & b \end{pmatrix}, \text{ com } a,\, b\in\mathbb{R} \text{ e } \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

com $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,...,4$.

a) Discuta a característica da matriz A em função dos valores de a e b.

b) Indique os valores de a e b para os quais o sistema $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ é determinado.

Ex. 7. Considere o sistema de equações lineares seguinte:

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=1 \\ x+2cy+2cz=1 \\ 2x+\ \ y+\ \ cz=b \end{cases}$$

Indique a resposta correcta:
a) Se $c\neq 1$ e $b\neq 1$ o sistema é possível e indeterminado.
b) Se $c=1$ ou $c=\frac{1}{2}$, $\forall\, b\in\mathbb{R}$ o sistema é possível e determinado.

c) Se $c = 1$ e $b \neq 2$ o sistema é impossível.
d) Se $c \neq \frac{1}{2}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$ o sistema é possível e indeterminado.

Ex. 8. Considere o sistema de equações lineares seguinte:

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha z = 1 \\ 2x - y - z = \beta \\ 9x - 2y + z = -1 \end{cases}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros α e β.
b) Resolva o sistema para $\alpha = \beta = 0$.
c) Mostre que a distância entre a solução encontrada em b) e o vector $\left(-\frac{24}{25}, -\frac{38}{25}, -\frac{2}{5}\right)$ é igual a $\sqrt{5}$.