Matemática I - 2009/2010

Ficha de exercícios

Semana 6: Matriz Inversa, Séries numéricas

1) Exercícios do Livro, *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter, Essential Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, third edition, 2008:*

Secção 16.6: Exercícios 2, 3, 4, 6 a 8;
Secção 16.7: Exercícios 2, 5.
Secção 10.4: Exercícios 2,3,4.

2) Exercícios adicionais:

Exercício 1. Prove que a inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Exercício 2. Usando as operações elementares, determine as matrizes inversas de

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercício 3. Seja A uma matriz simétrica e invertível de ordem n tal que $X'A = B + A$. Então:

a) $X = B'A^{-1} + I$ b) $X = A^{-1}B' + I$ c) $X = \left(\frac{B+A}{A}\right)'$

d) As respostas anteriores estão incorrectas

Exercício 4. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n. Sabendo que: $|A+B| = 3$, $|C| = 2$ e $(AX+BX)' = C$, obtenha X (como função de A, B e C) e calcule o seu determinante.

Exercício 5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que o determinante de A é igual a $-\left(1-x^2\right)^2$.

b) Indique os valores de x para os quais a matriz A não tem inversa.

Exercício 6. Averigue se as seguintes séries são convergentes. Em caso afirmativo, determine a sua soma.

a) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\sum_{n\geq 1} 3^n$ c) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ d) $\sum_{n\geq 3} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ e) $\sum_{n\geq 2} 5^{-n}$

Exercício 7. Indique para que valores de x as séries convergem e calcule as suas somas.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (3x-4)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(x+1)^{2n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1-|x|)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(x+1)^{3n}}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}}$

Exercício 8. Utilize a teoria das séries geométricas para escrever as seguintes dizímas sob a forma de fracções irredutíveis.

a) $0,999...$ b) $1,666...$ c) $0,1212...$

Exercício 9. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^2+n}{n^2-1}$, com $a \in \mathbb{R}$. Indique a resposta correcta:

a) se $a \neq 0$ então a série é divergente b) se $a \neq 0$ então a série é convergente
c) a série é convergente, $\forall a \in \mathbb{R}$ d) a série é convergente para $a = 1$

Exercício 10. A soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^2)^n$ é igual a:

a) $\frac{1}{x^2}-1$ se $x \in \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ b) $\frac{1}{x^2}-1$ se $x \in \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\setminus\{0\}$

c) $\frac{1}{x^2}$ se $x \in \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\setminus\{0\}$ d) $\frac{1}{x^2}$ se $x \in \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

Exercício 11. Considere a série $4x^2+16x^4+64x^6+...$, com soma S, se convergente. Qual das seguintes afirmações está correcta?

a) $S=(1-4x^2)^2-1$ se $|x|<\frac{1}{2}$ b) $S=(1-4x^2)^{-1}-1$ se $|x|<\frac{1}{2}$

c) $S=(1-4x^2)^{-1}$ se $|x|<\frac{1}{2}$ d) $S=(1-4x^2)^{-2}$ se $|x|<1$