Matemática I - 2009/2010

Ficha de exercícios

Semana 7: Funções reais (I)

1) Exercícios do Livro, *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter, Essential Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, third edition, 2008:*

Secção 6.5: Exercícios 1, 4, 5
Secção 7.8: Exercícios 2, 3, 5
Secção 7.9: Exercícios 1, 2, 3

2) Exercícios adicionais:

Exercício 1. Responda sucintamente às seguintes questões:

a) Defina função real de variável real e função real de variável inteira.

b) O que é uma função linear ? Dê exemplos de funções lineares e não lineares.

c) Qual a diferença entre contradomínio e conjunto de chegada de uma função ?

Exercício 2. Determine o domínio das seguintes funções.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \ln(3-2x)$

d) $i(x) = \sqrt{x^2-25}$ e) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ f) $k(x) = \ln(\ln x)$

g) $l(x) = \dfrac{1}{\ln(1-|x-1|)}$ h) $m(x) = \dfrac{\ln(4-x^2)}{\sqrt{e^x-1}}$

Exercício 3. Classifique cada uma das seguintes funções e sucessões quanto à monotonia e indique as que são limitadas.

a) $u_n = 2 - \dfrac{n-1}{10}$ b) $v_n = (-1)^{n+1}$ c) $w_n = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

d) $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ e) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, x \leq 0$ f) $\sin x$

Exercício 4. Estude quanto à convergência as sucessões seguintes, indicando os limites das que são convergentes:

a) $3 + \dfrac{1}{2n} + 2n\left[1 - (-1)^n\right]$ b) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}$ c) $\left(1 + \dfrac{2}{3n}\right)^{\frac{3}{2}n}$

d) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}$ e) $\left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)^{n}$ f) $\dfrac{1-n}{4n+3}$

g) $\dfrac{n^2+3n}{n+2} - \dfrac{n^2-1}{n}$ h) $\dfrac{2-n^3}{4n^3-7}$ i) $\dfrac{n^2+2}{5n-1}$

Exercício 5. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x}{2x^3-x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$ e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{x+\sqrt{3x}}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$

Exercício 6. Para que valores reais de a e b a função

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ b - 2x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua ?

Exercício 7. Estude o domínio e a continuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln(1 + x^2) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \dfrac{x-1}{|x+2|}$ d) $i(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

Exercício 8. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas. Ilustre as afirmações falsas com um contra-exemplo.

a) O contradomínio de uma função linear do tipo $f(x) = ax + b$ é sempre $D' = \mathbb{R}$.

b) A inequação $ax^2 + bx + c \geq 0$ tem sempre soluções reais.

c) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

d) Para alguns $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

e) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que $\ln(x+y) = \ln(x) + \ln(y)$.

f) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se que $\sqrt{x^2} = x$.

g) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se que $e^{x^2} = (e^x)^2$.