Matemática I - 2009/2010

Ficha de exercícios

Semana 9: Elasticidade, Derivação Implícita, Função Inversa

Exercícios do livro *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter J., Essential Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2008*

7.7: 2, 5, 6, 9
7.1: 1, 5, 7, 8, 10
5.3: 3, 5, 9,11
7.3: 1, 2, 3

Exercícios Adicionais

Exercício 1. Seja $F(x) = \frac{1}{2}x^k h(x)$, onde h é uma função diferenciável em todo o seu domínio e k uma constante. A elasticidade $El_x F(x)$ é:

a) $\frac{1}{2}k + El_x h(x)$ b) $-\frac{1}{2}k + El_x h(x)$ c) $k + El_x h(x)$ d) $-k + El_x h(x)$

Exercício 2. Determine a elasticidade em ordem a x das seguintes funções:

a) $F(x) = [g(x)]^a f(x)$ b) $F(x) = e^{x+a} f(x)$

Exercício 3. Supondo que f é uma função diferenciável, com $f(x) \neq 0$, determine a elasticidade em ordem a x das seguintes funções:

a) $x^5 f(x)$ b) $(f(x))^{3/2}$ c) $x + \sqrt{f(x)}$ d) $1/f(x)$

Exercício 4. Seja $f(x) = x\ln(x+1)$ uma função definida em $(2, +\infty)$. A elasticidade da função f é dada por

a) $1 + \dfrac{x^2}{(x+1)f(x)}$ b) $1 + \dfrac{x}{(x+1)f(x)}$

c) $1 + \dfrac{x^2}{(x-1)f(x)}$ d) $1 + \dfrac{x}{(x-1)f(x)}$

Exercício 5. Indique a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x)$, definida implicitamente pela equação $\sin(xf(x)) = f(x)$, no ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$:

a) $y = x$ b) $y = 1$ c) $y = 1 + \frac{\pi}{2}x$ d) $y = x + \frac{2-\pi}{2}$

Exercício 6. Seja $g(x) = f(xg(x))$ uma função definida implicitamente em $\mathbb{R}$. Sabendo que $f'(g(1)) = 2$, qual o valor de $g'(1)$?

a) $-2g(1)$ b) $g(1)$ c) 0 d) $-g(1)$

Exercício 7. Sabendo que $f(x) = x^3 + 2x - 1$ admite uma função inversa g e que $f(1) = 2$, indique o declive da recta tangente ao gráfico de g no ponto indicado:

a) 1/5 b) 1 c) 2 d) 5

Exercício 8. Considere a função real $f(x) = x^2e^x$.

a) Para qual dos intervalos a função admite inversa:

i. $(-\infty, \infty)$ ii. $(-\infty, -2)$ iii. $(-\infty, 0)$ iv) $(-2, \infty)$.

b) Seja $g(y)$ a função inversa de $f(x)$ e x_0 um ponto onde existe $f\,'(x_0) \neq 0$. A derivada da função inversa no ponto $y_0 = f(x_0)$ é:

i. $\dfrac{e^{x_0}}{x_0^2 + 2x_0}$ ii. $e^{y_0}(y_0^2 + 2y_0)$ iii. $\dfrac{e^{-x_0}}{x_0^2 + 2x_0}$ iv. $\dfrac{e^{-y_0}}{y_0^2 + 2y_0}$.

Exercício 9. Considere a função polinomial $f(x) = ax^n + c$ para $x \in R$ e onde a e c são constantes reais não nulas e n é um número natural.

a) A função f admite inversa:

i. $\forall a, c, n$ ii. $\forall a, c$ e $n > 1$ iii. $\forall a, c$ e n par iv) $\forall a, c$ e n ímpar.

b) Seja $g(y)$ a função inversa de $f(x)$. A derivada da função inversa no ponto (y_0, x_0) é:

i. $\dfrac{1}{ax_0^n + c}$, $ax_0^n + c \neq 0$ ii. $\dfrac{x_0^{n-1}}{an}$ iii. $\dfrac{x_0^{1-n}}{an}$, $x_0 \neq 0$ iv) $\dfrac{y_0^{1-n}}{an}$, $y_0 \neq 0$.

Exercício 10. Calcule

a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ b) $\cos\left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ c) $\tan\left(\arctan\left(\frac{-7}{3}\right)\right)$

d) $\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ e) $\tan\left(\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$

Exercício 11. Simplifique

a) $\sin^2(\arcsin x)$ b) $\cos^2(\arccos x)$ c) $\sin(\arccos x)$

d) $\cos(\arcsin x)$ e) $\tan(\arccos x)$ f) $\tan(\arcsin x)$

Exercício 12. Resolva:

a) $5^{x-1} > 5^{5-4x}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{3x}$

c) $\ln(3x+1) > \ln x$

d) $\log_3(x^2-1) < 2$

e) $\log_{\frac{1}{e}}(x^2-x) < \log_{\frac{1}{e}} x$

f) $\arccos(2x) = \frac{\pi}{6}$

g) $1 - 3\arctan(3x) = \pi\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$

h) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{81}$

i) $x^2 5^{-x} - 3.5^{-x} = 0$

j) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$

k) $\log_x 25 = -1$

Exercício 13. Derive as seguintes funções:

a) $\tan^2(\arcsin x)$

b) $arctan\,(x^2-1)$

c) $x^2 \arcsin x$

d) $\frac{1}{2}\arctan(e^{2x})$

e) $x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

f) $arctan\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

g) $a\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2}$ $(a > 0)$.