Matemática I - 2009/2010

Ficha de exercícios

Semana 13: Cálculo Integral (II)

Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008)**:**

9.3: 4, 5, 6
9.5: 2, 3
9.6: 3
9.7: 1, 4, 12

Exercício 1 *Determine uma primitiva das seguintes funções, nos respectivos domínios:*

a) x^2e^x b) $x\sqrt{x+1}$ c) $x^3\sqrt{1+x^2}$ d) $2x\cos x$ e) $\sin^2 x$

f) $\ln(2x-1)$ g) $\mathrm{x}^2\ln x$ h) $\arctan x$ i) $\ln^2 x$ j) $e^x\cos x$

Exercício 2 *Determine, por substituição, uma primitiva das seguintes funções:*

a) $\frac{x}{1+x^2}$ *b)* $\sqrt{1-\sin^2 x}$

c) $\frac{e^{\frac{x}{4}}}{1+e^{\frac{x}{10}}}$*, com* $x = 20\ln t$ *(*$t>0$*)* *d)* $\frac{\cos x}{\sin^6 x}$*, com* $x = \arcsin t$

Exercício 3 *Determine a função* f*, duas vezes diferenciável em* $\mathbb{R}$*, que verifica:* $f''(x) = 2\cos x + xe^x$*,* $f'(0) = 2$*,* $f(0) = 1$

Exercício 4 *Calcule as seguintes áreas/integrais:*

a) Calcule a área que fica acima da curva da função $f(x) = x^2 - 4$ *e abaixo do eixo das abcissas.*

b) Calcule a área que fica acima da curva da funçao $f(x) = \ln x$*, para* $x \in [0,1]$*, e abaixo da recta* $y = 0$*.*

c) Calcule a área que fica entre a curva da função $f(x) = \sin x$ *e o eixo das abcissas, para* $x \in [-\pi,\pi]$*.*

d) Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx$*.*

e) Calcule a área entre as curvas das funçoes $f(x) = x^2 + x + 1$ *e* $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$*, para* $x \in [-3,0]$*.*

Exercício 5 *Calcule a área dos seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5, y \geq -5x+5, y \geq \ln x\right\}$ b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq e^x, x \leq 1\right\}$

c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x^2+2\right\}$

Exercício 6 *Estude a convergência dos integrais impróprios e calcule-os quando tal for possível:*

a) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ b) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

d) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx$ e) $\int\limits_0^{3} \frac{1}{x-3}dx$ f) $\int\limits_0^{2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Exercício 7 *Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:*

a) $F(x) = \int\limits_1^x \ln t dt$ b) $H(x) = \int\limits_0^{x^2} e^{-t^2} dt$

Exercício 8 *Considere a função* $f(x) = \int\limits_{\pi}^{x^2} e^{-2t}dt$*. Escreva a fórmula de Taylor de* f*, de ordem 1, em torno de* $x=0$*.*

Exercício 9 *Considere a função* $F(x) = \int\limits_0^x tf(t)dt$*, onde* f *é uma função contínua e estritamente positiva em* $\mathbb{R}$*. Prove que* $x=0$ *é um minimizante local da função* $F(x)$*.*

Exercício 10 *Sem utilizar a primitivação, calcule:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \ln\left(t^2+1\right)dt}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \cos t dt}{x^2}$

Exercício 11 *Considere a função* $f(x) = \begin{cases} a-x & \text{se } x<0 \\ \frac{1}{b+x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $, b>0.$

a) Determine os valores de a e de b para os quais a função f é contínua.

b) Faça $a=b=1$ e considere a função definida por $F(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)dt$.

  i) Calcule $F(1)$.

  ii) Mostre que a função F admite inversa no intervalo $(0,+\infty)$.

Exercício 12 *Seja a função* $f(x) = \int_1^{x^2+1} \left(\frac{1+t}{t}\right) dt$.

a) Calcule $f(-1)$.

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto $x = -1$.

Exercício 13 *Considere a função com domínio* D_f*:*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

a) Para que valores de $x \in D_f$ a função f é diferenciável ? Escreva a expressão da função derivada $f'(x)$.

b) Determine $G(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$, definida em $[-1, \infty)$.