Capítulo 2

Equações não Lineares

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

(a) Prove que esta equação tem uma raíz $z \in [0.5, 0.7]$.

(b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z.

(c) determine o número m de iterações necessárias para garantir que $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Pretende-se calcular a raíz cúbica de um número real $a > 0$. Para isso utilizou-se o método iterativo dado pela fórmula

$$x_{n+1} = \frac{2\,x_n^3 + a}{3\,x_n^2}$$

(a) Explique como foi obtida esta fórmula.

(b) Justifique que o método converge, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 > 0$. Para que valores de x_0 a convergência é monótona?

3. Seja $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

(a) Prove que a equação $f(x) = 0$ não tem raízes negativas.

(b) a equação $f(x) = 0$ tem apenas uma raíz real z no intervalo $[1.5\,,\,2]$. Utilize o método de Newton para obter uma aproximação da raíz. Calcule 2 iteradas e apresente um majorante para o erro absoluto.

4. Pretende-se determinar, usando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0$$

(a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo $[2.6\,,\,3]$, estão asseguradas as condições de convergência do método.

(b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada.

5. Mostre que a equação

$$\ln x - (x-2)^2 = 0$$

tem exactamente duas raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raíz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia usar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$; $x_0 = 2.5$; ou $x_0 = 1.4$? Mostre que para o x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência e efectue uma iteração.

6. Pretende-se resolver a equação

$$\sin x - x + 1 = 0$$

(a) Prove que esta esta equação tem uma e uma só solução $z > 0$.

(b) Mostre que a sucessão $x_{n+1} = \sin x_n + 1$ converge para a raíz z, qualquer que seja $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, 2]$.

(c) Sem calcular elementos da sucessão, determine a sua ordem de convergência. A convergência será monótona?

(d) Partindo da aproximação inicial $x_0 = 2$, calcule x_2 e determine um majorante para o erro $|z - x_2|$.

7. Considere a equação $3x^2 - e^x = 0$.

(a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

(b) Considere as seguintes sucessões

$$(S1) \quad x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}} \qquad (S2) \quad x_{m+1} = \ln(3\,x_m^2)$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação, usando, para cada raíz, uma destas sucessões. Indique em cada caso um intervalo onde poderá ser escolhida a iterada inicial x_0.

(c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com $x_0 = 1$. estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.

(d) Será possível usar (S1) para aproximar a maior raíz positiva da equação? E poderá usar (S2) para aproximar a menor raíz positiva ?

8. Considere o problema de cálculo das raízes do polinómio $p(x) = x^3 - 4x + 1$.

(a) Mostre que o polinómio tem três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$ tais que

$$z_1 \in [-2.2, -2.0], \quad z_2 \in [0.1, 0.3], \quad z_3 \in [1.8, 2.0].$$

(b) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g_1(x) = (4x-1)^{1/3}$ converge para z_1, qualquer que seja $x_o \in [-2.2, -2.0]$.

(c) Obtenha um valor aproximado de z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

(d) Mostre que o m+etodo do ponto fixo com função iteradora $g_1(x)$ pode ser usado para calcular a raiz z_3, mas não a raiz z_2.

(e) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g_2(x) = \frac{1}{4}(x^3+1)$ pode ser utilizado para calcular a raiz z_2, mas não qualquer uma das outras raízes.

(f) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora

$$g_3(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

pode ser utilizado para calcular a raiz z_3, mas não qualquer uma das outras raízes.

(g) Mostre que o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 \in [0.1, 0.3]$, converge para z_2. Obtenha uma aproximação de z_2 com erro absoluto inferior a 10^{-6}.

9. considere a função $g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$.

(a) Prove que a sucessão $x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \cdots$ converge para um número $z \in [-1, 1]$ e determine a sua ordem de convergência.

(b) efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \; \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \; \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \cdots$$

Os resultados parecem estar de acordo com as conclusões da alínea anterior?

10. Determine todas as raízes da equação

$$(x+2)^2 = e^x \left(2x + 4 - e^x\right)$$

, com um erro inferior a 10^{-5}. A escolha do método iterativo fica ao seu critério.

11. Pretende-se determinar uma raíz da equação $x = \phi(x)$ pelo método do ponto fixo, com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789 \quad x_5 = 0.43814$$

Sabendo que $|\phi'(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que ainda se tem que efectuar até atingir a precisão pretendida.

12. Sabendo que $h(x)$ e $h'(x)$ são crescentes, diferenciáveis, e que h tem uma raíz no intervalo $I = [-1, 1]$, pretende-se determinar a raíz da equação $F(x) = x + h(x) = 0$, usando o seguinte método

$$x_0 = a, \; x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

verifique que F tem uma única raíz em I e que existem valores $a, b \in I$ para os quais o método converge. O que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

13. Se uma função f for contínua no intervalo $[a, b]$, o teorema do valor médio para integrais afirma que existe $\zeta \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\zeta)(b-a)$$

(a) Faça $f(x) = \sin(x)\cos(x)$, $a = -\frac{\pi}{6}$ e $b = \frac{\pi}{6}$. Mostre que o método de Newton para a resolução da equação $f(x) = 0$ converge, qualquer que seja a aproximação inicial pertencendo a $[a, b]$.

(b) Calcule $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$ e use o método de Newton para calcular um valor ζ como o referido no teorema do valor médio.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Considere a seguinte modificação do método de Newton para a aproximação dos zeros de f

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathbb{R} \\ &x_{n+1} = x_n - \frac{\Phi(x_n)}{\Phi'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

onde $\Phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostre que este método tem ordem de convergência quadrática também no caso em que os zeros de f são múltiplos.