Capítulo 3

Sistemas de equações

1. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$. Demonstre que as seguintes aplicações definem normas em V.

(a) $\mathbf{x} \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(b) $\mathbf{x} \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$

(c) $\mathbf{x} \mapsto \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$

Observação: as aplicações acima definidas, costumam ser designadas respectivamente por $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ e $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

2. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

(a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_\infty$

(b) $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_2$

(c) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_\infty$

3. Considere o espaço vetorial das funções (reais de variável real) contínuas no intervalo $[0, 1]$, habitualmente designado por $C[0, 1]$. Mostre que as seguintes aplicações definem normas em $C[0, 1]$.

(a) $f \mapsto \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

(b) $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|\, dt$.

4. Sejam $\|\cdot\|_{V_1}$ e $\|\cdot\|_{V_2}$ normas vectoriais em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\|\mathbf{x}\|_{V_1} \leq c_1 \|\mathbf{x}\|_{V_2}, \quad \|\mathbf{x}\|_{V_2} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_{V_1}, \quad \forall_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n.$$

Prove que as normas matriciais $\|\cdot\|_{M_1}$ e $\|\cdot\|_{M_2}$ induzidas por estas normas vetoriais verificam

$$\|A\|_{M_1} \leq c_1\, c_2 \|A\|_{M_2}, \quad \|A\|_{M_2} \leq c_1\, c_2 \|A\|_{M_1}, \quad \forall_A \in L^n.$$

Como interpreta este resultado em termos de equivalência de normas?

5. Seja $\mathbb{L}^n$ o conjunto das matrizes invertíveis de ordem n. Mostre que se $A \in \mathbb{L}^n$ for tal que $\|A\| < 1$, então a matriz $I - A$ é não singular e verifica

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

6. Sejam A e B matrizes reais, com $Det A \neq 0$. Mostre que se a matriz B for singular então

$$\frac{1}{cond(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

(sugestão: Existe um vector x, de norma 1, tal que $B\,x = 0$. Recorde também que $\|Ax\| \geq \|x\|/\|A^{-1}\|$.)

7. Sabe-se que uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas (ou colunas) é invertível. Demonstre a seguinte majoração para a norma da inversa

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\displaystyle\min_{i=1,\cdots,n}\left(|a_{ii}| - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right)}.$$

8. Seja $A \in \mathbb{L}^n$ uma matriz simétrica e suponha que todos os menores principais são não singulares. Neste caso A admite uma única fatorizarão $A = L\,D\,L^T$, onde L é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária e D é uma matriz diagonal.

(a) Mostre que a fatorização LDL^T de A pode ser obtida pelas fórmulas:

$$\begin{cases} d_{ii} = a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\, d_{kk}, & i = 1, \cdots, n \\ \\ l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, l_{jk}\, d_{kk}}{d_{jj}}, & \begin{array}{l} j = 1, \cdots, n \\ i = j+1, \cdots, n \end{array} \end{cases}$$

(b) Mostre que A é definida positiva se e só se $d_{ii} > 0, \quad i = 1, \cdots, n$.

(c) Calcule a fatorização LDL^T da matriz de Hilbert (de ordem 3)

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(d) Obtenha também a fatorização de Cholesky de H_3.

9. Considere os dois sistemas lineares (equivalentes)

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} 0.00005x + y & = & 0.5 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{lcr} x + 20000y & = & 10000 \\ x + \qquad\quad y & = & 1 \end{array} \right.$$

Supondo que os cálculos são efetuados num sistema de ponto flutuante (base 10) com 4 dígitos na mantissa, analise as vantagens da pesquisa de pivot em cada um dos sistemas. Qual o tipo de pesquisa mais adequado em cada caso?

10. Seja A a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

onde a é um parâmetro real. Suponha que, ao resolver o sistema $A\,x = b$, com certo valor de a, se obteve a solução $\overline{x} = (1, 1, 1)$. Supondo que o valor de a está afetado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ε, determine um majorante para o erro absoluto $\|\overline{x} - x\|_\infty$.

11. Seja A uma matriz quadrada, de dimensão n, definida da forma seguinte

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , |i-j| > 0 \\ 1 & , |i-j| = 0 \\ \text{-1} & , |i-j| > 0 \end{array} \right.$$

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Determine os números de condição $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$.

(c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

Sejam x_1 e x_2, respetivamente, as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$. Determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

no caso de $n = 20$. Comente.

12. Designemos por x_1 uma aproximação da solução do sistema linear $A\,x = b$ e por Δx_1 a correção a adicionar a x_1 de forma a obter a solução exacta do sistema dado.

(a) Mostre que Δx_1 é solução de um sistema linear com a mesma matriz de coeficientes A.

(b) Construa um método iterativo que lhe permita calcular $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots$ (se Δx_1 pudesse ser calculado de forma exacta, a solução do sistema seria $x_1 + \Delta x_1$, como Δx_1 também só pode ser calculado de forma aproximada, $x_2 = x_1 + \Delta x_1$ apenas pode ser tomado como nova aproximação de x). Este tipo de métodos designam-se habitualmente por **correção residual** ou **refinamento iterativo**.

(c) Dado o sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Efetue a fatorização LU da matriz A. Tomando $x_1 = (-0.052, 0.2, 0.004, 0.184)$ e usando a factorização mencionada, efetue uma iteração pelo método de refinamento iterativo. verifique que x_2 é a solução do sistema dado.

13. 2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 12 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efetue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4 iterada. Considere $x^{(0)} = (4, 4, 4)^T$.

(c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $x^{(k)}$.

14. Considere um sistema de duas equações lineares na forma geral:

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

(a) Mostre que os método de Jacobi converge, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$, se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}$. (Nota: como a matriz é não singular, existe sempre uma permutação das linhas que faz com que os elementos da diagonal sejam não nulos).

(b) Mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty,$$

onde x é a solução do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max(|\frac{a_{12}}{a_{11}}|, |\frac{a_{21}}{a_{22}}|)$.

(c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efetue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (2,1)^T$. Com base na alínea anterior, determine um majorante do erro para o resultado obtido.

(d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0.001$?

15. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 106 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{pmatrix}$$

(a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

(b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (1,1,1)^T$.

16. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x - \frac{y\cos x}{4} & = & 0 \\ 1 - 2y + |x-1| & = & 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que existe uma única solução deste sistema no conjunto $[0,1]\times[1,2]$.

(b) Utilizando o método do ponto fixo, determine uma aproximação $x^{(n)}$ da solução que verifique $\|z - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.05$

17. Pretende-se resolver pelo método de Newton generalizado o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3+1) & = & 10 \\ 3(x_2+1) + x_3^2 & = & 11 \\ 3x_1 + x_3^2 & = & 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $x^{(0)} = (3,2,1)$. Mostre que o sistema linear $Av = b$ a ser resolvido para se obter $x^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

obtenha ainda o vector b.

18. Considere o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z & = & 0 \\ e^y - z^2 & = & 1 \\ -x^2 + y + z & = & \mu \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de zero. Para aproximar a solução deste sistema, pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (c,0,0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$, somos levados a resolver o sistema linear com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única?

(c) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Doolitle e calcule $x^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).

19. Considere as linhas de $\mathbb{R}^2$ definidas pelas equações

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$

$$2x^2 - xy - 5x = -1$$

Suponha que $P_0 = (3.4\,,\, 2.2)$ é uma aproximação do ponto P onde as duas linhas se intersetam. utilize o método de newton para determinar uma aproximação $x^{(n+1)}$ (de P) que verifique

$$\|x^{n+1} - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.005$$

20. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 + \cos(x_1x_2x_3) &= 1 \\ (1-x_1)^{1/4} + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 &= 1 \\ -x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

(a) Escreva o sistema de equações lineares que lhe permite calcular a primeira iterada $x^{(1)}$ por aplicação do método de Newton generalizado.

(b) Poderá escolher $x^{(0)} = (000)$? Calcule $x^{(1)}$ a partir do vector inicial $(0\pi3)$.

(c) Reescreva o sistema dado na forma $x = F(x)$ e defina o correspondente método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$. Usando como ponto inicial o $x^{(1)}$ obtido na alínea anterior, efetua duas iteração deste método.

21. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) Obtenha a fatorização desta matriz pelo método de Crout.

(b) Com base no resultado anterior, calcule $DetA$.

(c) Calcule A^{-1}.

(d) Determine o número de condição de A, na norma 1.

(e) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabe-se que o segundo membro é afetado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \varepsilon$. Determine um majorante para o erro relativo da solução.

22. Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que a matriz B pode ser fatorizada pelo método de Cholesky e efetue a fatorização.

(b) Com o mínimo de cálculos, obtenha a fatorização de Crout para B.