



Parte 1

Selecione a opção correta para cada uma das seguintes questões. Não necessita de apresentar cálculos. Cada resposta correta vale 1 ponto. Cada resposta errada é penalizada em 0,2 pontos.

1. Seis estudantes, três rapazes e três raparigas, alinham-se aleatoriamente para uma fotografia. Qual é a probabilidade de os rapazes e as raparigas ficarem intercalados?

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

2. Existe uma linha no Triângulo de Pascal na qual o quarto e o quinto elementos são iguais. Qual é a soma de todos os elementos dessa linha?

(A) 16 (B) 256 (C) 128 (D) 64

3. Considere dois números reais $a, b > 0$. Qual das seguintes expressões é equivalente a $\ln(a^2b) - \ln(b^2a)$?

(A) $2(a + \ln b)$ (B) $2 \ln(ab)$ (C) $\ln a - \ln b$ (D) $2 \ln a + \ln b$

4. Considere o número complexo $z = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$. Qual dos seguintes números complexos é uma raiz sexta de z ?

(A) $\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}$ (B) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{36}}$ (C) $2\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}$ (D) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{36}}$

5. Para qual das seguintes funções h é h' , a derivada de h , positiva para todo o $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$?

(A) $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$

(C) $h(x) = \cos(x) - \sin(x)$

(B) $h(x) = \sin(x) - \cos(x)$

(D) $h(x) = -\sin(x) - \cos(x)$

6. Considere a sequência definida por $u_n = n \ln(n+3) - n \ln(n)$.
O limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ é

(A) 3

(B) 0

(C) e

(D) e^3

7. Seja f uma função de domínio \mathbb{R}^+ . A reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ é uma assíntota ao gráfico de f . O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{f(x)}$ é

(A) 2

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $+\infty$

Parte 2

Apresente uma justificação detalhada para cada uma das suas respostas.

1. Considere os números complexos

$$z_1 = -3 - \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad z_2 = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

- (a) Escreva z_1 e z_2 na forma trigonométrica.
- (b) Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $(z_1 z_2)^n$ é um número real positivo.

2. Considere a função real definida pela expressão

$$f(x) = x^2 + e^{x^2} - 1$$

Utilizando exclusivamente métodos analíticos:

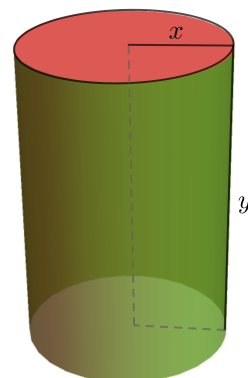
- (a) Estude f quanto à sua monotonia e extremos locais.
- (b) Estude f quanto às regiões de concavidade para cima e para baixo.
- (c) Estude a existência de assíntotas no gráfico de f .
- (d) Mostre, usando o teorema do valor intermédio, que existe pelo menos um $c \in]1, 2[$ tal que $f(c) = 3c$.
- (e) Seja g a função real definida por $g(x) = \sin^2 x$.
 - i) Determine o domínio da função $\frac{f}{g}$.
 - ii) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g}(x)$.

3. A tarefa em questão é criar uma caixa com uma base de formato circular de raio x cm, e uma altura y cm (ver figura). A caixa deve ter um volume de 15π cm³. O material lateral e da base (verde) tem um custo de 10 euros por cm², enquanto o material superior (rosa) tem um custo de 20 euros por cm².

- (a) Mostre que, considerando apenas os materiais, o custo de produção da caixa é dado por

$$C(x) = 30\pi x^2 + \frac{300}{x}$$

- (b) Determine as dimensões da caixa de forma que o custo seja o menor possível. Justifique cuidadosamente a sua resposta.



Pontuações:

Parte I

Questão	1	2	3	4	5	6	7
Pontuação	1	1	1	1	1	1	1

Parte 2

Questão	1a	1b	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b
Pontuação	2	1,5	1	1	1	1,5	1,5	2	1,5